

László Surányi

**Die Parallelen von Euklid und von Bolyai:
Symbole der griechischen und der modernen Tragik**

Inhalt:

I. Die Revolution der Individualität innerhalb der pythagoreischen Tradition.

1. Gemeinsame Voraussetzung bei Euklid und Bolyai, Gauß und Lobatschewskij: die unendliche, unbeschränkt verlängerbare Gerade und die Neutralisierung der Richtung
2. Die unendliche Gerade als Bild der stetigen Aufgabe des Zentrums
3. Die Geometrie betrachtet die unendliche Gerade als Grundbegriff und leitet den Begriff der Richtung von dem der Geraden ab. Descartes' Origo-Gedanke als Wende
4. Der Kern der euklidischen Anschauung: Die Transparenz des rechten Winkels. Mondrian: Im rechten Winkel nimmt die Ruhe des von aller Willkür und Tragik des schiefen Winkels gereinigten schöpferischen Geistes Gestalt an
5. Die Revolution von Bolyai, Lobatschewskij und Gauß: Die sich im schiefen Winkel manifestierende Individualität vertritt ebenfalls eine Funktion der ewigen Form
6. Das euklidische Parallelen-Paar ist das anschauliche Bild dessen, wie das Verhältnis der vollständigen, metaaxiomatischen Bedeutung (der oberen Geraden) und der beschränkten, normalwissenschaftlichen Bedeutung (der unteren Geraden) im Pythagoreismus lebte
7. Das wissenschaftliche Zeitalter übernimmt den Pythagoreismus und Euklids Parallelen, wobei aber die untere Gerade (Individualität und normale Wissenschaft) an Gewicht zunimmt. Bolyai, Lobatschewskij und Gauß formulieren diese Proportionsverschiebung mit axiomatischer Exaktheit und machen sie dadurch analysierbar
8. Die beim Paradigmenwechsel zutage tretenden beziehungsweise sich verstärkenden theoretischen Fragen und das Trägheitsgesetz des Paradigmenwechsels. Eine fundamentale metaaxiomatische Forderung: immer den höheren Maßstab wählen und selbst den höheren an noch höherem messen bis zum Größtdenkbaren (Anselm). Nur das konsequente Durchsetzen dieser Forderung kann der neuzeitlichen Wende einen positiven Sinn geben. (Kandinsky: Geist ist aufwärts und vorwärts gehende Bewegung. L. Szabó: Vorwärts und aufwärts strebende Rangrelativität.) Die Mathematik in ihrem vollständigen Sinn ist die Mathematik dieser unendlichen Steigerung
9. Platons Analyse des pythagoreischen Gegensatzes von Quadrat und Rechteck (Gaiser): die Geburt des Maßstabs

II. Euklid und Bolyai: Vergleich

10. Wovon sich die euklidische Ebene distanzierte, das stellte Descartes in ihren Mittelpunkt: Die Origo weist auf die unteilbar-teilende, messende und vergleichende, also im vollständigen

Sinn des Wortes mathematisierende Subjektivität. Bolyai, Lobatschewskij und Gauß denken die cartesische Wende weiter in bezug auf das Parallelenaxiom

11. Der Mythos als eine das Zentrum umfangende Kreisscheibe. Die Neuzeit löst die Substantialität des Kreises auf (Cassirer), weil sie nur auf diesem Weg immer tiefer in den Anziehungskreis des Zentrums eintreten kann. Allerdings muß sie gegen die Gegenrichtung (auch in sich selbst) kämpfen: gegen den bloßen Austritt aus dem Mythos, gegen das Verschieben des Zentrums in die unendliche Ferne, das geometrische Bild dieses Verschiebens ist die (auswärts) unendliche Gerade. Das Zentrum als aktiver Anfangs- und Endpunkt. Der Logos als Zentrum und zentrale Richtung
12. Die euklidischen Parallelen haben weder in der Gegenwart noch in der Vergangenheit oder Zukunft einen gemeinsamen Punkt, aber sie haben ein gemeinsames, ins Unendliche gerücktes Zentrum
13. Die Bewegung des *Purusha* und der *Prakriti*
14. Die euklidische Ebene ist die Ebene der *Ananke*, aber auf ihr können Figuren einander ähnlich sein
15. Die hyperbolische Ebene zeigt die "Kehrseite" der euklidischen Ebene. Die Analyse von Bolyai, Lobatschewskij und Gauß macht die verborgenen divergierenden Kräfte der Geraden sichtbar. Der Punkt als Brechpunkt zwischen dem für unendlich fern gehaltenen Anfangs- und Endpunkt
16. Das Gewicht des Punktes nimmt zu, er leistet größeren Widerstand gegen die Eindeutigkeit der euklidischen vertikal-horizontalen Gliederung
17. Die tragische Spannung, die Welt der unaufgelösten Gegensätze treten in den Vordergrund. Die Formen werden schwerer geboren und sind endgültiger und individueller; sie lassen sich weder verkleinern noch vergrößern (es gibt keine Ähnlichkeit). Bolyai, Bartók, Vajda, Ady
18. Die hyperbolische Geometrie verschärft den Kampf zwischen dem universellen und vollständigen Pythagoreismus und der nach beschränkten Zielen strebenden Normalwissenschaft auch innerhalb der letzteren
19. Die raumausstrahlende Kraft des Punktes und der Eros des "unendlich Fernen" erstarken
20. Die Kraft des Logos wird in gegensatzbewußten Individuen geboren, die die Ruhe des Mythos in Unruhen mit umgekehrten Vorzeichen zerlegen
21. Der Wert einer Form hängt davon ab, inwieweit sie den Urwiderspruch des Daseins des Logos – daß das überzeitliche Zentrum immer wieder in der Zeit gegenwärtig ist – ausdrückt und in welchem Grade sie alle anderen Widersprüche auf diesen Urwiderspruch zurückzuführen vermag

TEIL I.

1.

Sowohl bei Euklid als auch bei Bolyai, Gauß und Lobatschewskij beruht das Parallelenaxiom¹ auf dem in beiden Systemen ableitbaren – nach Bolyai "absolut" genannten – Satz, daß aus einem Punkt außerhalb einer Geraden stets eine andere, sie *nicht schneidende* Gerade gezogen werden kann.

Wollen wir die Weltbilder, die in den beiden Geometrien Gestalt annehmen, miteinander vergleichen, müssen wir zuerst verstehen, was dieser Satz aussagt. Um die Existenz der sich nicht schneidenden Geraden nachzuweisen, muß die Geometrie *das Problem der Richtung neutralisieren* und die Trägheit der geradlinigen Bewegung ins *Endlose* strecken, unendlich machen.

2.

Die unendliche Gerade, genauer: die Gerade, die unbeschränkt verlängert werden kann, macht eine "negative Bewegung" unendlich: jene Bewegung, mit der wir das Zentrum, das Ursprungs- und Endpunkt in einem ist, aus unserem Blickfeld entlassen, so daß seine Bedeutung erblaßt und wir uns nicht mehr mit ihm identifizieren können.

Diese unendliche Gerade ist das Bild der stetigen Aufgabe des Zentrums.

3.

Jedwede geometrische Anschauung geht von der selbstverständlichen Existenz und dem *Grundbegriff*charakter der endlosen Geraden aus und leitet den eigenen Richtungsbegriff davon ab.² Wir kennen keine geometrische Anschauung, die statt der extensiven Geraden die Richtung, die auf Intensivität und Konzentration weisende Form als Grundbegriff betrachtet.

Demgegenüber besteht die Stärke von Descartes' *Arithmetisierung* der Geometrie eben darin, daß sie die *Grundrichtungen* in den Mittelpunkt der geometrischen Anschauung stellt: die vertikale und die horizontale Achse sowie die Origo (=Koordinatenursprung), also jenen Ausgangspunkt, wo das *cogito* als sicherer Ursprungspunkt in die Welt des *sum* vorstößt und die Struktur des *sum* beleuchtet: daß nämlich dieses *sum* selbst im Schnittpunkt der Vertikale des Überzeitlichen und der Horizontale des Zeitlichen steht.³

¹ Das euklidische Parallelenaxiom besagt – in Ptolemäus' berühmter Umformulierung des neuplatonischen Proklos – daß zu jeder Geraden *e* durch einen äußeren Punkt nur *eine* sie nicht schneidende Gerade gezogen werden kann, und diese Gerade wird als parallel zu *e* bezeichnet. Bolyais und Lobatschewskijs Axiom besagt dagegen, daß durch einen äußeren Punkt stets *mehrere* die Gerade *e* nicht schneidende Geraden gezogen werden können, wobei die jeweils erste auf beiden Seiten als parallel zu *e* bezeichnet wird.

² Das gilt auch für solche Axiomatisierungen der Geometrie, die den Begriff der Geraden nicht als expliziten Grundbegriff haben.

³ Das Koordinatensystem wurde nicht von Descartes erfunden, aber weltanschauliche Bedeutung bekam es erst in Descartes' philosophischem System.

Im Gegensatz zur kopernikanischen Revolution, die die absolute Bedeutung der Grundrichtungen des Mythos – oben und unten, vorne und hinten – erschütterte beziehungsweise relativierte, erscheint in Descartes' neuer Mathematik der *ausgezeichnete Punkt*, die *ausgezeichnete Richtung* und drittens das *ausgezeichnete Flächengebilde: der Einheitskreis*, das gemeinsame Urbild aller Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geraden-Paar).⁴ Diese Origo-Struktur, mit der die Intensität (*cogito*) die Welt der Extensität beleuchtet, ist einer der schönsten Gedanken Descartes'. Sein Individualismus trifft sich hier mit seiner Sensibilität für die Urformen.

Die extensive Gerade (und nicht die intensitätvertretende Richtung) ist also sowohl in der euklidischen als auch in der hyperbolischen⁵ Geometrie der selbstverständliche (lineare) Grundbegriff. Da nimmt es nicht wunder, daß sie sich als formal gleichwertig, als "relativ widerspruchsfrei" erweisen⁶. Jede von beiden läßt sich innerhalb der anderen vergegenwärtigen, modellieren, ihre Probleme können, im Hinblick auf die *formale* Widerspruchsfreiheit, vollständig aufeinander abgebildet werden. Doch im Hinblick auf die *Anschaulichkeit* ist die Lage anders. Die hyperbolische Geometrie hat kein natürliches, anschauliches Modell in der euklidischen. Die euklidische hat dagegen in der hyperbolischen ein anschauliches Modell, das sogar eine zentrale Rolle spielt. Dennoch – oder vielleicht eben deshalb – ist die euklidische Geometrie, von wenigen Ausnahmen abgesehen, die "Grundlage" für die Anschauung der Mathematiker, und vielleicht werden die beiden Geometrien auch nur von wenigen für gleichwertige Anschauungstatsachen gehalten.⁷

Die Sätze und Gebilde der hyperbolischen Geometrie scheinen unsere Anschauung eben durch die Problematik der *Richtung* ("Krümmung" der Geraden) zu irritieren. (Wenn man versucht, sie auf der euklidischen gedachten Ebene darzustellen, ist man generell gezwungen, die Gerade als Kurve zu veranschaulichen, wie etwa bei Abbildung 6. geschehen.) Fraglich bleibt natürlich, ob wir verpflichtet sind, bei diesem Begriff der Richtung stehenzubleiben, den die euklidische Ebene suggeriert. Haben wir denn kein direkteres, dynamischeres, reicheres und intensiveres Richtungsbild, das uns auch in den "gekrümmten" Geraden der hyperbolischen Ebene einen Schritt zur Bildung eines dynamischeren Richtungsbegriffs sehen läßt?

Die Ausarbeitung einer Anschauungsform, die den Begriff der Richtung ins Zentrum stellt,

⁴ Kegelschnitte sind ebene Figuren, die zustande kommen, indem man einen Kegel (geraden Kreiskegel) mit einer Ebene schneidet, oder anders: Kegelschnitte kommen zustande, indem man einen Kreis von einem außerhalb seiner Ebene liegenden Punkt auf eine andere Ebene projiziert. Durch solche Projektion bekommt man einen Kreis, eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, Gerade oder ein Geraden-Paar, wie man es an den Schatten einer Lampe auf ebener Oberfläche veranschaulichen kann.

⁵ Die von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij initiierte, auf der Negation des euklidischen Parallelenaxioms basierende Geometrie wird gewöhnlich aus fachlichen Gründen kurz hyperbolische Geometrie genannt.

⁶ D. h. wenn eine von beiden formal widerspruchsfrei ist, dann folgt daraus die formale Widerspruchsfreiheit der anderen.

⁷ Nehmen wir eine Ebene und eine Kugel, die diese Ebene in einem Punkt *P* berührt. Wir fixieren den Punkt *P* und lassen die Kugel immer größer werden (so daß sie die Ebene immer im Punkt *P* berührt). Im euklidischen Raum füllen diese Kugeln den ganzen Halbraum aus, darum können wir hier die *Ebene* als *Kugel mit unendlichem Radius* betrachten. Doch *im hyperbolischen Raum* hebt sich die Grenzfläche dieser Kugeln von der Ebene ab, es bleibt ein Raumteil, den die Kugeln nicht ausfüllen. Diese Grenzfläche, die sogenannte *Parasphäre*, die *Kugel mit unendlichem Radius* im hyperbolischen Raum, hebt sich von der Ebene ab, doch ist ihre Krümmung überall Null. Andererseits *gilt auf dieser Fläche in einem wohldefinierten Sinne die euklidische Geometrie*: diese Fläche ist das anschauliche Modell der euklidischen Geometrie im hyperbolischen Raum. Die Kugelflächen haben die gleiche Geometrie im euklidischen und hyperbolischen Raum, die Winkelsumme der Dreiecke ist dort immer größer als 180°. Für die Grenzfläche, die Kugelfläche mit unendlichem Radius gilt die euklidische Geometrie in beiden Räumen, die Winkelsumme der Dreiecke ist 180°. Der Raumteil, der "hinter" der Kugel mit unendlichem Radius liegt, fehlt im euklidischen Raum. Im hyperbolischen Raum liegen dagegen hier die sogenannten Hypersphären und die (hyperbolische) Ebene, wo die Winkelsumme der Dreiecke immer kleiner als 180° ist.

ist heute in der Mathematik unbedingt notwendig, wenn die Mathematik ihre spirituelle Kraft und Freiheit zurückgewinnen soll.

Die aktuelle Tendenz zeigt eben das Gegenteil. Die mathematische Bedeutung der Richtung wird in den Nachkommen der Geometrie – man denke an die Topologie – zunehmend amorph.

4.

Vom Aspekt der Anschauung und des formalen Denkens werten die meisten Mathematiker die beiden Geometrien nicht gleich. Vom Aspekt der formalen Widerspruchsfreiheit halten sie beide für gleichwertig, aber vom Aspekt der Anschaulichkeit gewähren sie der euklidischen Geometrie Priorität. Sie gilt als "die" geometrische Anschauung.

Gefördert wird diese Priorität auch durch den Umstand, daß die meisten modernen Zweige der Geometrie wie die analytische und im wesentlichen sogar die projektive⁸ nur eine "Verlängerung", eine Verallgemeinerung der euklidischen ist. Einzig die hyperbolische Geometrie steht auf ihrer Ebene im diametralen Gegensatz dazu.

Die euklidische Geometrie vertritt das griechische Gleichgewicht von Anschaulichkeit und formalem, diskursivem Denken, oder anders gesagt: von Bild und Logos, Bild und Interpretation. Innerhalb dieses Gleichgewichts gibt es eine Schicht: die selbstverständliche Präsenz der transparenten Grundgebilde (Gerade, rechter Winkel, Quadrat), die die im Kern des Mythos lebende ursprüngliche ungespaltene Einheit von Urbild und Interpretation ausstrahlt. An diesem ungespaltenen Mythoskern hält die Anschauung des Mathematikers – wohl unausgesprochen und ziemlich unbewußt – fest. Denn jede Anschauung besitzt im Kern eine klare Einheit von Bild und Interpretation.

In der Malerei vertritt Mondrian die Transparenz der Grundgebilde der euklidischen Anschauung gemäß ihrem wahren Gewicht. Er sieht im schiefen (spitzen und stumpfen) Winkel das Tragische, den Ausdruck jener Daseinsform, die im Individuellen versinkt, voller Willkür und den Gefühlen ausgeliefert ist. Dem stellt er die Kontemplation gegenüber, "die plastische Sicht", die sich dem Unveränderlichen und Universellen zuwendet. "Spricht es nicht für sich, daß die Gerade das Vollkommenste und Tiefste in uns selber und in den Dingen ist? (...) Auch wird der tragischen Empfindung einzig und allein der entgegen, der gelernt hat – und zwar gerade indem er sich selbst die reine plastische Sicht entwickelte –, vom Individuellen ausgehend das Iniversale herauszuarbeiten. (...) Wenn der ästhetisch schöpferische Mensch einmal verinnerlicht sein wird, ist es selbstverständlich, daß er die Notwendigkeit empfinden wird, sich nach Maßgabe seiner neuen inneren Identität nach außen zu wenden."⁹ Als Grundformel der sich über die individuell-willkürlich-affektive Sphäre erhebenden, schöpferischen "rein plastischen" Sicht betrachtet er den von allem Tragischen gereinigten rechten Winkel, der die deformierende Wirkung der im schiefen Winkel vorherrschenden horizontalen Linie besiegt. Er umschließt den Horizont, weist aber gleichzeitig

⁸ Fügen wir allen Geraden der euklidischen Ebene einen "unendlich fernen" (oder "idealen") Punkt so zu, daß die parallelen Geraden denselben unendlich fernen Punkt haben, und nehmen wir an, daß die Menge der neuen, unendlich fernen Punkte eine "unendliche Gerade" bildet, so bekommen wir eine neue Geometrie, wo zwei Geraden sich immer schneiden, und zwar genau in einem Punkt. Zwei "eigentliche", sich schneidende Geraden schneiden sich in einem "eigentlichen" Punkt, zwei parallele Geraden in einem "unendlich fernen" Punkt und eine "eigentliche" und die unendlich ferne Gerade schneiden sich in einem unendlich fernen Punkt. Die so zustande gekommene Geometrie ist eine sogenannte *projektive* Geometrie.

⁹ Piet MONDRIAN: *Natürliche und abstrakte Realität, Ein Aufsatz in Dialogform*, S. 313–315

eindeutig nach oben.

Das euklidische Parallelenaxiom besagt, daß die Gerade – jede Gerade – die Spannung des rechten Winkels in sich enthält und dieser rechte Winkel eine Kreuzstruktur ausstrahlt, die die gesamte Ebene ungebrochen erhellt.

5.

Die euklidische Anschauung beruht also einerseits auf der *eindeutigen*, ungebrochenen transparenten *Bedeutung* der Bilder, konkreter: der *Grundgebilde* (Gerade, rechter Winkel), und drückt diese Bedeutung aus, andererseits erscheint in der *Interpretation* aber schon ein Bruch zwischen "Universellem", das heißt Urform und Individualität. Zur reinen Struktur der Urform gelangt diese Anschauung nur, indem sie sich von der konkreten Sphäre des Individuums und des Gefühls distanziert.

Das Bolyaisch-Lobatschewskijsche Axiom zeigt an, daß sich die Individualität mit dieser Distanz nicht zufriedengeben kann. Sie kann nur eine Eindeutigkeit akzeptieren, in der auch die positiven Momente der Mehrdeutigkeit enthalten sind. Der schiefe Winkel ist eine ebensolche ewige Grundform wie der rechte Winkel, die Individualität ist ebenso eine Funktion der ewigen Form wie die Universalität. (Die Interpretation der Individualität, die dieses Axiom enthält, ist also weiterhin insofern tragisch, als es die Universalität des Individuums nicht behauptet.) Das ist die letzte Ursache, warum die Gerade von Bolyai, Lobatschewskij und Gauß krumm wirkt, warum die in ihr gespannte Struktur des rechten Winkels komplizierter ist als die der euklidischen Gerade. Der schiefe Winkel, die Individualität sind ebenfalls hineinkomponiert, in die Eindeutigkeit auch die Mehrdeutigkeit. Und für diese Wende (und die sie zum Ausdruck bringende "gekrümmte" Gerade) ist das Schmittsche Maß das *eigene* Maß: Wir können die Wahrheit der hyperbolischen Anschauung daran messen, ob sie die Individualität radikal als innere Funktion der ewigen Form, des Geistes zu sehen und aufzuzeigen vermag oder ob auch sie, überkommen als gemeinsame Krankheit aus Mittelalter und Neuzeit, die Individualität für ein *endliches* – doch in seiner Bedeutung gewachsenes – *Ding* hält.

Der Schritt, durch den Bolyai, Gauß und Lobatschewskij die Individualität ins Zentrum stellen, ist ein ausgesprochen anschauungszerstörender Schritt. Er dokumentiert in der Geometrie, dem *anschaulichsten* Zweig der Mathematik, daß die Selbstverständlichkeit der elementarsten Anschauungstatsachen wie Quadrat, Rechteck, Gerade, Parallelität erloschen ist, ihre Bedeutung fraglich geworden ist.¹⁰ Die Entdecker der hyperbolischen Geometrie stellen den Grundmythos der Geometrie, die Selbstverständlichkeit der euklidischen Anschauung in Frage. Das neue

¹⁰ In der hyperbolischen Geometrie ist die Winkelsumme der Dreiecke immer kleiner als 180° , die der Vierecke immer kleiner als 360° , darum gibt es kein Rechteck und Quadrat. Haben zwei Punkte, U und T , den gleichen Abstand von einer Geraden, dann liegt jeder innere Punkt der Strecke UT näher an der Geraden als U und T . So haben die Punkte U_1 und T_1 der Abbildung 4b den gleichen Abstand von e , und der Punkt S zwischen U_1 und T_1 liegt näher. Drei Winkel des Vierecks SU_1R_1P sind rechte Winkel, darum ist der vierte, bei U_1 liegende Winkel kleiner als 90° .

Parallelenaxiom sagt aus, daß jene Einheit zwischen Bild und Interpretation, die im Kern des geometrischen Mythos steckt, nicht völlig, sondern nur relativ ungebrochen ist. Und es sagt aus, daß die Anschauung der verstärkten Subjektivität nicht auf diese gebrochene, relative Einheit gegründet werden kann.

Die Frage lautet also, ob Bolyai, Gauß und Lobatschewskij die geometrische Anschauung tatsächlich im Namen einer stärkeren und intensiveren Anschauung zerstörten. (Bolyai dachte seiner absoluten Geometrie offensichtlich die Rolle der gereinigten, sich erneuernden Anschauung zu, die die eben analysierte Relativität besiegt.) Denn bleiben wir bei der durch die "relative Widerspruchsfreiheit" suggerierten doppelten Wahrheit stehen, daß das Selbstverständliche etwas anderes ist auf der Ebene der Anschauung und etwas anderes auf der – höher bewerteten – Ebene der Ratio, dann führt dies zur endgültigen Spaltung zwischen der bildlich-sinnlichen Evidenz und der Evidenz der formalen Wahrheit, zum Abbau der Sprache, zur skeptischen Leugnung der Wahrheit der Anschauung (und des Mythos).

6.

Die Anschauung der euklidischen Geometrie entstand innerhalb der pythagoreischen Tradition – auch wenn sie Abstand von ihr hielt. Dementsprechend spielte bei der Entstehung und Erhärtung der euklidischen Gebilde von Anfang an deren symbolische spekulative Bedeutung eine entscheidende Rolle. Die neuzeitliche mathematische Naturwissenschaft trug die Zweideutigkeit, die später in der Ambivalenz der relativen Widerspruchsfreiheit der euklidischen und hyperbolischen Geometrie manifest wurde, bereits bei der Entstehung latent in sich. Einerseits akzeptierte sie, im Gegensatz zum Mittelalter, den Pythagoreismus als Einheit der wissenschaftlichen und wissenschaftstranszendierenden Erkenntnis und akzeptierte das euklidische Parallelenaxiom, das ein geometrisches Abbild dieser Einheit ist. Andererseits wächst innerhalb dieser Einheit, im Gegensatz zum griechischen Pythagoreismus, das Gewicht der Wissenschaft gravierend. Die "normale Wissenschaft", wie T. S. Kuhn sie nennt¹¹, entsteht und entwickelt sich zu einem ausschlaggebenden Faktor.

Dennoch wird die Krise der modernen Zeit nicht durch die wachsende Kraft der Normalwissenschaft verursacht – eine solche Behauptung würde unweigerlich in einer Ideologie münden, die die freie Forschung beschränken will –, sondern durch den Umstand, daß die spekulative Kraft und Leidenschaft, die allein in der Lage wären, die neue Situation aufzuarbeiten, nicht im gleichen Verhältnis mitwuchsen. Mit anderen Worten: In der Neuzeit erstarkten die Positionen der Axiomatik, und das ist ein produktiver Zug der Zeit, aber die Positionen der Metaaxiomatik (im Sinne des Vorworts) erstarkten nicht im gleichen Maße. Diese Disproportion ist es, die zerstörerisch wirkt.

Das euklidische Parallelenaxiom läßt sich – besonders in Ptolemäus' Formulierung – als Veranschaulichung der Distanz zwischen der im "Alltag" der normalen Geometrie angewendeten

¹¹ Th.S.Kuhn: *Die Struktur wissenschaftlichen Revolutionen*, passim

minimalen und der maximalen spekulativen (metaaxiomatischen) Bedeutung der Geraden deuten. Es sagt aus, daß die "untere" Gerade mit minimaler Bedeutung (mit minimaler, aber nicht ohne Bedeutung) auch auf der "oberen", maximalen Bedeutungsebene eine eindeutige Entsprechung (Parallele) hat, die der unteren durch ihre Existenz eindeutig die Richtung weist, doch diese beiden Bedeutungen sich in der Geometrie, auf der minimalen Bedeutungsebene nie treffen können. Die Geometrie kann höchstens an den Intensivitätsunterschied der geometrischen Überschaubarkeit und der Transparenz des plotinischen Einen, an die Entfernung der geometrischen und der pleromatischen Wahrheit erinnern. Sie erinnert aber auch ständig daran, daß nur die Existenz der oberen Gerade der minimalen Bedeutung Eindeutigkeit und der unteren Gerade eindeutige Richtung verleiht. Wir müssen also beides, die Existenz der oberen Gerade *und* den Abstand der unteren Gerade von ihr im Gedächtnis behalten. Die in der Geometrie verborgene metaaxiomatische Wahrheit ist das Fundament der geometrisch-axiomatischen Wahrheit.

Durch das Parallelenaxiom macht also die euklidische Geometrie das Verhältnis dieser beiden Wahrheiten, die Eindeutigkeit ihres Verhältnisses, ihre *Meßbarkeit mit gemeinsamem Maß* zu ihrer anschaulichen Grundlage, und das macht sie zu der "heiligen" Geometrie, die in der Forderung *more geometrico* geehrt wird. Das gemeinsame Maß kann nur das größere sein: die metaaxiomatisch-spekulative Wahrheit.

In dieser Einheit von Anschauung und Spekulation liegt bis heute der Reiz des euklidischen Systems, selbst für Forscher, die auf dem Globus des Geistes so weit voneinander entfernt sind wie Mondrian und Cassirer.

7.

Die pythagoreische Tradition bezog ihre Kraft daraus, daß die Spannung der durch die zwei parallelen Geraden veranschaulichten Bedeutungsebenen ständig in ihr präsent war und einen befruchtenden Einfluß auf beide, auf Spekulation und Geometrie, ausübte. Doch in der modernen Wissenschaft gewann die nur die minimale Bedeutung berücksichtigende Interpretation zunehmend an Gewicht, bis sie sich ganz verselbständigte und nunmehr ausschließlich als Interpretationsbasis betrachtet wird.

Der moderne Pythagoreismus übernahm die euklidische Anschauung als theoretische Ausgangsbasis, doch in der Praxis funktionierte er zunehmend nach der Formel der hyperbolischen Geometrie – noch bevor Bolyai und Lobatschewskij das neue Axiom ausgesprochen hätten. Um diesen Widerspruch lösen zu können, mußte zuerst das latent wirkende Axiom ausgesprochen werden. Es mußte ausgesprochen werden, daß das "Unten", also die Praxis, und in einer anderen Beziehung das Gewicht der Individualität im Vergleich zum "Oben" gewachsen war. Und es mußte als *Axiom*, das heißt in einer Form ausgesprochen werden, die die Probe der axiomatischen Strenge besteht.

Bolyai und Lobatschewskij stellten also mit ihrem Axiom eine neue Form der Subjektivität

in den Mittelpunkt, deren Inhalt dramatischer ist als bei Descartes. Hier ist der Widerstand gegenüber der Transparenz – und mithin gegenüber dem mathematischen Moment – manifest; das dionysische Bestreben des Individuums, sich selbst unmittelbar zu transzendieren, als nicht weiter analysierbares, letztes Bedeutungsatom zu existieren, gelangt hier offen zum Ausdruck. Da stellt sich die Frage, wie stark der andere Pol der Subjektivität, das Transparenzverlangen ist. In welchem Maße ist es im Individuum präsent und wirksam? Stemmt es sich nur als Gegenkraft, als beschränkende Kraft gegen die dionysischen Widerstände der Individualität, oder fungiert es als freie formende Kraft in ihr? Erfüllt und fixiert der Kampf der Kräfte und Gegenkräfte das Zentrum des Individuums, oder ist es vom Transparenzverlangen durchdrungen und folglich frei genug, den kämpfenden Kräften seine Form aufzuprägen? Ersteres bedeutet also ein passives, gebundenes Zentrum und eine zugespitzt ambivalente Sichtweise, letzteres ein freies, aktives Zentrum und eine transparente Anschauung.

Zweifellos trachtet die hyperbolische Geometrie nach letzterem, nach der subjektivitätszentrischen mathematischen Anschauung. In ihrer jetzigen Form ist diese Anschauung jedoch ambivalent. Jene primär Transparenz ausstrahlenden Formen der Subjektivität, die einen Antipol zu den dionysischen Bestrebungen der Individualität bedeuten – in erster Linie der Punkt und die Richtung –, sind auf der hyperbolischen Ebene nicht ihrem subjektiven Gewicht gemäß, sondern nur als objektive Gegenkraft präsent. Die Ambivalenz der hyperbolischen Anschauung kommt auch darin zum Ausdruck, daß sie die euklidischen Rahmen akzeptiert. Sie akzeptiert die unendlich-endlose Gerade, den neutralisierten Richtungsbegriff und den Bedeutungsverlust des Zentrums. Was sie ihnen gegenüberstellt, stellt sie ihnen innerhalb dieses Rahmens gegenüber.

8.

Die ganze Bewegung erinnert an den Prozeß der Entstehung des normalwissenschaftlichen Paradigmas und des Paradigmenwechsels, so wie ihn T. S. Kuhn beschreibt.

Die Aktivität der normalen Wissenschaft zielt zum Großteil darauf ab, die Kräfte ihrer zentralen (theoretischen) Paradigmen auf die praxisnäheren Detailfragen anzuwenden (was Kuhn Lösen von Rätseln nennt). Der "Normalforscher" darf sich dabei nicht intensiv mit der Bedeutung der Paradigmen beschäftigen, denn je intensiver er sich mit ihrer Bedeutung beschäftigt, desto intensiver werden die darin lebenden Fragen, aber diese Fragen entziehen ihm die Energien für das, womit er sich beschäftigen will: die Praxis. Andererseits wird seine Arbeit vom *Glauben* an die Paradigmen geleitet. Und zu den normalwissenschaftlichen Paradigmen gehört auch, daß man lernen muß, die Paradigmen zu sehen, ohne die in ihnen verborgenen Fragen zu hören.

Wenn wir den Widerspruch hervorheben wollen, der in den naturwissenschaftlichen Paradigmen steckt und den das Paradigma verdeckt (darin liegt seine Stärke), dann können wir sagen, daß die Entfernung vom heißen Kern der Bedeutung des Paradigmas von vornherein zur Bedeutung der naturwissenschaftlichen Paradigmen dazugehört. Ebenso gehört aber auch der

Glaube an die Paradigma dazu, der – ähnlich wie der mythische Glaube – eine statische Form des Glaubens ist.

Während des Paradigmenwechsels, zumindest während des Wechsels der grundlegenden Paradigmen, steigt das Interesse an den theoretischen, metaaxiomatischen Fragen, die der Bedeutung der Paradigmen innewohnen. Die Metaaxiomatik unterscheidet sich insofern von der Axiomatik und der Grundlagenforschung der theoretischen Wissenschaften, als sie unentwegt und uneingeschränkt nach dem forscht, was jene nur sporadisch, zu Zeiten der Krisen eines Paradigmas und selbst dann nur mit beschränkterem Zweck erforschen. Bei jedem Paradigmenwechsel kommt nämlich in der Wissenschaft auch eine der Erstarkung der Intensität entgegengesetzte Tendenz zur Geltung, die wir als Trägheitsgesetz des Paradigmenwechsels bezeichnen können. Wie tief die Anschauungstatsachen auch liegen mögen, die bei einem Paradigmenwechsel zutage treten, nie können die neuen Paradigmen sie in ihrer ganzen Tiefe assimilieren – eben weil sie wissenschaftliche Paradigmen und somit statisch sind. Sie haben ihre Existenz einem Kompromiß zu verdanken. Das Ziel dieser Paradigmen ist nämlich metaaxiomatisch (hat also Vollständigkeitsanspruch), allerdings nur in dem Maße wie es das andere Ziel fördert: die Stabilität der normalwissenschaftlichen Forschung zu gewährleisten. Das Verhältnis dieser unterschiedlichen, an wichtigen Punkten sogar gegensätzlichen Ziele ist in der Grundlagenforschung nicht geklärt. Und weil diese Ziele ungeklärt sind, verstehen Einstein und Bohr einander nicht, ja deshalb versteht weder Einstein noch Pauli sich selbst, obgleich sie manchmal einen wahrhaft metaaxiomatischen Blick auf die Probleme der Quantenphysik werfen.

Die hyperbolische Geometrie stellt die metaaxiomatischen Fragen der Subjektivität in den Mittelpunkt der Geometrie. Ihre metaaxiomatische Bedeutung liegt darin, daß sie das neue Ziel anklingen läßt: die Geometrie der transparenten, *weil* subjektivitätszentrischen Anschauung. Es kommt aber auch jene Tendenz, sogar zweifach, zur Geltung, die diese Zielsetzung beschränkt. Sie ist bereits bei der Entstehung der hyperbolischen Geometrie gegenwärtig, wenn diese, abgesehen vom Parallelenaxiom, die euklidischen Rahmen bedenkenlos beibehält. Und sie ist präsent bei der Aufarbeitung der hyperbolischen Geometrie, wenn die mathematische Axiomatik die mit der hyperbolischen Geometrie erscheinende dynamisiertere Anschauung nur bis zum Niveau des Paradigmas der doppelten Wahrheit assimiliert, die im Konzept der "relativen Widerspruchsfreiheit" latent anwesend ist. (Das Paradigma der doppelten Wahrheit, das die Wahrheit des Glaubens mit einem anderen Maßstab mißt als die Wahrheit der Erkenntnis, wurde von der mittelalterlichen Philosophie eingeführt, aber es besitzt noch immer eine starke Wirkung in der Naturwissenschaft, zum Beispiel im quantenmechanischen Komplementaritätsprinzip.)

Die mathematische Anschauung läßt sich jedoch nicht mit dem Paradigma der doppelten Wahrheit befriedigen – deshalb stellte sich ja auch die neuzeitliche, naturwissenschaftliche

Denkweise der mittelalterlichen entgegen –, und sie kann sich nicht mit der im Prozeß des Paradigmenwechsels zur Geltung kommenden Trägheit abfinden. Sie kann sich nicht damit zufriedengeben, einen mit metaaxiomatischen Fragen und Antworten angefüllten, also umfassendere und intensivere Bedeutung tragende Anschauungstatsache in ein Paradigma zu verengen, das sie auch unter normalwissenschaftlichen Verhältnissen verwenden kann. Wo, um einzelne Teilziele zu erreichen, eine solche Verengung dennoch notwendig ist, muß der Forscher den Unterschied der Intensität und des Wirkungskreises beider Bedeutungen in einer anschaulichen Form sich vergegenwärtigen können, die den Unterschied auch meßbar macht. Will er wissen, was er macht – und ein Mathematiker im vollständigen Sinne des Wortes will es auch auf dieser Metaebene wissen –, dann darf er nicht vergessen, daß er in diesem Fall die ursprüngliche Vollständigkeit verengt.

In den neuzeitlichen mathematischen Disziplinen wirkt nicht nur eine starke Tendenz zur Verengung des pythagoreischen Vollständigkeitsanspruchs und seiner einseitigen, aber wirksamen Verwertung für die Ziele der Normalwissenschaft, sondern auch zur Verdeckung der hier vorliegenden Verengung. Dabei hat auch die Mathematik der Neuzeit ihre Wirksamkeit dem Umstand zu verdanken, daß sie die pythagoreischen Rahmen beibehält, wenn auch mit unbestimmter Bedeutung, und noch mehr der Tatsache, daß es Forscher gibt, die sich darum bemühen, diese Rahmen wieder zu Grundlagen zu machen, ja sie sogar zu verbreitern. Sie forschen nach den noch unbekanntem und unmathematisierten Kreisen der Wahrheit, um dabei mathematisch nutzbare neue Erkenntnisformen zu schaffen. So gründet Descartes die Geometrie und deren Arithmetisierung auf den Origo-Gedanken. Und das sehen wir auch bei Bolyai, Gauß und Lobatschewskij, die sich zu einem stärkeren Widerstandsherd durcharbeiten als dem euklidischen: zur Individualität. Ihre Geometrie vermag auch in einem Raum mit größeren Widerständen die Identität der Richtung zur Geltung zu bringen. Aufgrund ihrer dynamischeren Anschauung können sie sogar zwischen solchen Widerständen eine Gerade ziehen, wo die euklidische Anschauung nicht mehr fähig ist, die Identität der Richtung durchzusetzen. Dies erklärt, warum die hyperbolische Ebene bei Euklid nicht als Ebene, nicht einmal als irgendeine Fläche erscheint, während es im hyperbolischen Raum eine Fläche mit euklidischer Geometrie gibt.

Es ist immer das Größere, also die umfassendere und bis zum tieferen Widerstandsherd vordringende Form, in welcher das Kleinere (Engere und Massivere) sich darstellen, analysieren und messen läßt, was aber voraussetzt, daß wir das Größere am noch Größeren messen – bis ganz zum Größtdenkbaren. Dazu sind wir fähig, weil wir mit dieser unendlichen Steigerung – wie Lajos Szabó sagt – “der Größenordnung nach identisch”¹² sind. Nur diese unendliche Steigerung kann der neuzeitlichen Wende einen positiven Sinn und eine positive Richtung geben. Die Mathematik im vollständigen – also metaaxiomatischen – Sinn ist nichts anderes als die Mathematik dieser

¹² Lajos SZABÓ: *Adalékok a halmazelmélet kérdéseihöz 2. (Beiträge zu Fragen der Mengenlehre)*, S.132

unendlichen Steigerung. Sie bestimmt Sinn und Richtung der Mathematik. (Auch den Sinn und die Richtung des geometrischen Richtungsbegriffs. Und wir müssen auch die *Richtung* des geometrischen Richtungsbegriffs kennen, um begründet von geometrischer Richtung sprechen zu können.)¹³

Damit haben wir auch gesagt, wo der einzige *wirksame* Gegner des *wirksamen* Nihilismus ist, der heute (auch) in den mathematikbezogenen Richtungen des Geisteslebens vorherrscht. Dieser Nihilismus geht von einem Mathematikbild aus, das die Wirksamkeit der Mathematik und der mathematisierten Wissenschaft und Technik mit der auf eine minimale Bedeutungsebene beschränkten Auslegung der mathematischen Formen verschmilzt; aber es verdeckt und vergessen läßt, daß das ursprüngliche vollständige Ziel der Erkenntnis hier im Interesse bestimmter Teilziele eingeengt wird.

9.

Auch in den Paradigmen des anwendungszentrischen wissenschaftlichen Denkens waltet eine intensive, um die Verdichtung zum Begriff bemühte Kraft. So unterscheidet auch diese Denkweise zwischen intensivem ("gutem") und extensivem ("schlechtem") Unendlichen, zwischen Maß und Maßlosem, Ganzem und Teil. Aber sie beschäftigt sich nicht mit der Begründung dieser Unterschiede, mit der Frage, woher der Unterschied zwischen dem Maß und dem zu Messenden kommt. Sie macht zwei, einander widersprechende Antworten geltend:

- Die Meßbarkeit ist eine Grundeigenschaft der Welt, die erkannt werden soll.
- Das Maß ist etwas "anderes" als das zu Messende, es befindet sich außerhalb des zu Messenden; die Existenz des Maßes ist nur Hypothese, nur eine Art seinsloses Sein im Vergleich zur Realität der für undurchdringbar gehaltenen Materie.

Ähnliches kann von den übrigen Gegensatz-Paaren gesagt werden. Auch das intensive Unendliche ist beispielweise im Unendlichkeitsbegriff der Mengenlehre nach dem Bild des angehäuften, extensiven, schlechten Unendlichen geformt.

Platon sieht die Rolle der Mathesis darin, daß sie unser Augenmerk auf den Ursprung der erwähnten Unterschiede lenkt. Demnach besteht die Grundfunktion der Mathesis darin, diesen "Anders"-Charakter, das Hypothetische des Maßes aufzuheben und die Übermacht der Undurchdringbarkeit der Materie zu brechen. Er veranschaulicht das mit dem pythagoreischen Gegensatz-Paar Quadrat/Rechteck. "Die Fläche mit verschiedenen Seiten (Rechteck mit den Seiten a und b) kann durch die geometrische Mittelbildung ($a:m=m:b$) gleichseitig werden (Quadrat mit der Seite m). Die Diversität ($\theta\alpha\tau\epsilon\rho\nu$) liegt dabei in der Beliebigkeit der Flächengestalt, genauer:

¹³ Kandinsky charakterisiert das geistige Leben als Bewegung nach vorwärts und aufwärts (*Über das Geistige in der Kunst*, S. 13), Szabó charakterisiert es als "vorwärts und aufwärts strebende Rangrelativität". (*Szemináriumi előadások I.*, S. 120 u.ö.)

in der Verschiedenheit der beiden Seiten, die Identität (ταυτον) in der eindeutigen Bestimmtheit der Gestalt und in der Gleichheit der Seiten."¹⁴ Sein Flächeninhalt bleibt der gleiche, aber wir haben ihm den Stempel der Identität aufgedrückt. Das Quadrat hebt die in den Seiten des Rechtecks artikulierte Diversität (θατερον) durch das geometrische Mittel in der Identität (ταυτον) auf (Timaios 35A). Das Quadrat ist nicht die reine Identität selbst, dennoch eine höhere und reinere Anschauungsform. Der Gegensatz von Identität und Diversität ist in ihm nicht mehr als *beliebiges* Verhältnis zwischen Vertikale und Horizontale aktiv (siehe auch die Problematik des schiefen Winkels), sondern als prinzipieller Gegensatz dieser Richtungen.

Dieses Bild veranschaulicht die Schlüsselrolle der pythagoreischen Mathesis. Die pythagoreische Anschauung verharrt nicht bei jenen Formen des Unterschieds von θατερον und ταυτον, andererseits von Maß und zu Messendem, wo dieser Unterschied – wie in den Paradigmen der anwendungszentrischen Wissenschaft – noch als unbegrenzte Beliebigkeit, also unbegründet in Erscheinung tritt, sondern sie bildet aus diesen Formen mit der intensiven Identitätserinnerung der Seele eine reinere Anschauungstatsache, die den prinzipiellen Gegensatz von Identität und Diversität veranschaulicht. Sie demonstriert, daß die Präsenz der Identität in dieser abgeklärteren Form die Grundlage jeder Messung ist. Das Quadrat ist die Grundlage jeder Flächenmessung.

Das Bild reflektiert gleichzeitig – noch dazu exponierter und artikulierter als das euklidische Bild des Parallelen-Paars – den Dimensionsunterschied zwischen den Paradigmen der an der Anwendung orientierten Wissenschaft und der pythagoreischen Anschauung des Ganzen. Beide Bilder sind mathematisch eng verbunden: Innerhalb der absoluten Geometrie lassen sich die euklidische und die hyperbolische nach der Existenz von Quadrat und Rechteck trennen. Quadrat und Rechteck gibt es nur auf der euklidischen Ebene.

¹⁴ Konrad GAISER: *Platons ungeschriebene Lehre*, S. 53.

TEIL II.

10.

Die bisherigen Analysen zusammenfassend, können wir sagen, daß die euklidische Anschauung in entscheidenden Punkten die pythagoreische Anschauung, deren Daseinsauffassung vertritt. So bewahrt sie das pythagoreische Quadrat als Grundlage jeder Messung. Die euklidische Anschauung ist eine echte Anschauung – vielleicht noch mehr als die hyperbolische –, sofern sie sich von den Widerständen, die sie nicht aufheben kann, distanzieren kann, indem sie die eigene zentrale Aussage in lebendiger Form darlegt. Sie distanziert sich also von für sie nutzbaren oder unüberwindlichen Widerständen, ohne sich ständig besonders darum bemühen zu müssen (wozu Hegels anschauungsarmer "Begriff" genötigt ist) oder überschwenglich an ihrem Zentrum hängen zu müssen (das wäre die von Rosenzweig kritisierte Schwärmerei).

Die euklidische Anschauung vergegenwärtigt zum einen den Rangunterschied zwischen dem abstrakt-wissenschaftlichen Denken, das das Maß an dem Anderen, dem in sich Maßlosen angleicht, und dem Denken, das den "anders"-Charakter und das Hypothetische des Maßes aufhebt. Zum anderen distanziert sie sich selbst mit der gleichen Gebärde von dem subjektiven Moment. Auch bei Platon ist es eine Schlüsselfrage, wie die subjektive Tätigkeit der Messung nicht "außerhalb" des Maßes, also nicht "andersartig" sein kann.

Das Bild der Parallelen mit ihrem immer gleichen Abstand (Abb. 2) vergegenwärtigt den Unterschied zwischen der Bedeutungsebene der spekulativen Anschauung und des normal-wissenschaftlichen Paradigmas, was allerdings keine Subjektivierung beinhaltet. Die beiden Geraden, die die beiden Bedeutungsebenen vertreten, haben zwar eine gemeinsame geometrische Richtung, treffen sich aber nie in einem Punkt. Sie werden von einem grenzenlosen extensiven Gebilde, der Fläche, und nicht von einer intensiven Form, dem Punkt, zusammengehalten. Dieses Bild hält Abstand von Fragen der *Subjektivität*, die die beiden Bedeutungsebenen auf sich selbst bezieht und aneinander mißt, wobei die stärkere die schwächere durchleuchtet.

Bei der Betrachtung der Abbildung 2 taucht die Möglichkeit auf, daß vielleicht die Vertikale der gemeinsamen senkrechten Richtung diese dynamischere, beide Bedeutungsebenen auf sich und aufeinander beziehende Subjektivität vertritt. Und das trifft tatsächlich zu – nur gelten die Gesetze der ganzen Fläche, etwa das Gesetz der Parallelität, auch für diese nach oben strebende Vertikale.

Auch hier ist es Descartes, der die messende Subjektivität mit seinem Origo-Gedanken in den Mittelpunkt der Geometrie stellt. Er stellt mit dem Origo-*Punkt* den Ausdruck dessen in den Mittelpunkt der euklidischen Ebene, wovon sie bisher Abstand hielt: Die Origo drückt die unteilbar-teilende, messende und vergleichende Subjektivität aus, also die im vollständigen Sinne des Wortes

mathematisierende Subjektivität. Mit jeder Richtung (auch mit der auf der Abbildung nach oben zeigenden Vertikalen) gibt es eine identische, von der Origo ausgehende Richtung. Die Origo vertritt jenes aktive Verhalten, das Szabó teilendes Verhalten nennt.¹⁵ Jede Richtung (wie jeder Vektor) ist zerlegbar in die Summe einer zur Origo zeigenden und einer von ihr ausgehenden Richtung. Das teilende Verhalten, das die Origo ausdrückt, schafft die Grundlage dafür, daß wir die Bewegungen unterschiedlicher Richtung quantitativ vergleichen können.

Die euklidische Lösung, die sich der messenden Subjektivität und deren Ausdruck enthält, befriedigt die Begründer der hyperbolischen Geometrie nicht. Sie denken auch an diesem Punkt Descartes' Origo-Gedanken weiter. Sie wollen der Geraden, dem Punkt, der geometrischen Anschauung mehr Bedeutung verleihen. Statt der als statisch empfundenen Ruhe der euklidischen Anschauung nähern sie sich dem subjektiven Dynamismus, nicht nur seinen anschauungsschaffenden Kräften, sondern auch seinen anschauungszerstörenden Kräften, um beide analysieren und in ihre Anschauung einfügen zu können.

Schauen wir also an, wo sich diese innerhalb der euklidischen Geometrie unbetonten Widerstände befinden, die nun von den Entdeckern der hyperbolischen Geometrie expliziert werden.

Wir haben gesehen, daß die subjektivierenden Funktionen des Punktes in der euklidischen Ebene vor Descartes fast vollkommen gefehlt haben. Auch im Verhältnis von Punkt und Gerade ist die Gerade "stärker". Das besagt das Axiom der beliebigen Verlängerbarkeit der Geraden, und besondere Betonung verleiht ihm das Parallelenaxiom. Die euklidische Geometrie neutralisiert den Ursprungs- und den Endpunkt (und damit auch den Ruhepunkt) – zumindest in bezug auf die Gerade. Damit bringt sie den Punkt um seine ursprüngliche Bedeutung. Denn jeder Punkt strebt ja danach, Zentrum, Ursprungs- und Endpunkt, Origo zu sein. Der Mittelpunkt lebt in der Tiefe jeden Punktes.

Bolyai, Gauß und Lobatschewskij werfen das subjektive Streben des Punktes, Zentrum zu sein, bei der Untersuchung des euklidischen Parallelenaxioms als Widerstand ein. Und wenn wir dieses Streben, den darin manifestierten spirituellen Anspruch konsequent geltend machen wollen,

¹⁵ "Der progressive Charakter der Mengenlehre und des Atomismus besteht darin, daß sie das teilende Verhalten vertreten. Ihr zerstörender Charakter besteht darin, daß sie dies einseitig und beschränkt tun. Bei dem nach Gottes Ebenbild geschaffenen Menschen folgt das Unendlich-Teilen-Können, die unendliche Aktivität, aus seinem Menschsein. Die Grenzen dabei: 1/ Inwieweit habe ich den Wunsch und die Kraft zum Teilen? 2/ Dafür gibt es weder eine quantitative noch eine qualitative Grenze bis zum Urmysterium. Und innerhalb dessen: der Diamant kann das Glas teilen, aber das Glas nicht den Diamanten (oder das Verhältnis von Holz und Axt). Oder: sogar mit einer hydraulischen Presse kann ich die Luft oder den Raum nicht teilen. ... Das Individuum (das Unteilbare) teilt die Welt. Man braucht Kraft, um einen Stab zu teilen, man braucht aber auch Kraft, um eine abstrakte Linie zu teilen – geistige Kraft. Man darf das Moment nicht vernachlässigen, daß sich eine geometrische Linie nur mit konkreter Kraft und konkretem Richtungsbewußtsein teilen läßt. ... Dieses teilende Verhalten ist das positive, ethische Verhalten. ... Atomismus: ewige, unendliche Teile. Doch den Antiatomismus (Klerikalismus) schmerzte es, daß er geteilt wurde. Er wagte nicht, den Atomismus zu überbieten." Lajos SZABÓ: *Adalékok a halmazelmélet kérdéseihöz 2. (Beiträge zu Fragen der Mengenlehre 2.)*, S.127.

können wir nicht bei der Feststellung der relativen und formellen Widerspruchsfreiheit des euklidischen und des hyperbolischen Systems stehenbleiben, sondern müssen die in ihnen manifestierten grundlegenden und, wie wir bereits sahen, zum Teil gegensätzlichen Tendenzen vergleichen. Hat doch die hyperbolische Geometrie eben den Sinn, tiefere als die euklidischen Widersprüche zutage zu fördern, tiefer zu den Widerständen des teilenden, messenden und vergleichenden, das heißt im vollständigen Sinn des Wortes mathematisierenden Subjekts vorzudringen.

11.

Obleich das Bild der unendlichen-endlosen Geraden die Zentralität des Punktes, seine Anfangs- und Endpunktfunktion neutralisiert, enthält sie die Aussage, daß sich an beiden "Enden" der Geraden etwas anderes befindet (Abb. 1). Auch in der Welt der Rationalität, wo die endlose Gerade als Grundbegriff fungiert, muß soviel anerkannt werden, daß die Gerade, gut voneinander unterscheidbar, Anfang und Ende hat, auch wenn beide in die für sie unüberschaubare, chaotische unendliche Ferne hinausgeschoben werden.

Das, was sich "jenseits" der Geraden befindet, jener Punkt, auf den die Gerade als Zentrum weist, existiert, aber nicht als unendlich ferner Punkt. Auch für uns nicht.

Aber wie geraten wir dennoch unendlich fern von ihm?

Die Religion und auch der Mythos bringen uns die über Zeit, Geburt und Tod stehende Identität unseres Ausgangs- und Endpunktes nahe. Unsere Geburt, unser Tod, unsere Wiedergeburt beziehen sich auf das gleiche Zentrum, lassen sich aus ihm deuten. Die Identität unseres Ausgangspunktes und unseres Endpunktes spannt sich als *Richtung* in jedem großen Moment unserer Gegenwart: als das Bewußtsein der Überzeitlichkeit, das sich erneuern, immer wieder zu einem Ausgangspunkt machen läßt und damit Zukunft gründet. Nur müssen wir die Differenz und die Identität von Ausgangspunkt und Endpunkt zu erfassen. Das befiehlt der in uns lebende Logos. Das befiehlt der in den Mythos eingeschlossene Logos.

Der Mythos verhält sich zu seinem Zentrum wie eine Kreisscheibe zu ihrem Zentrum. Er gestattet keine weite Entfernung, bewahrt die überzeitliche Identität von Ausgangspunkt und Endpunkt. Das Zentrum durchdringt den ganzen Kreis "wie Materie", verschmilzt materieartig mit ihm und liefert die Dichte des Kreises, den Zusammenhalt der Mythengemeinschaft. Die unmittelbare, materieartige (Cassirer sagt: substantielle) Allgegenwärtigkeit ermöglicht die *magische* Manifestation des Zentrums, führt aber nicht unbedingt zur *freien* Manifestation des Zentrums. Dazu ist eine größere Freiheit von Entfernung und Annäherung erforderlich.

Der Logos ist ein Wendepunkt. Eine größere Freiheit von Entfernung und Annäherung dringt in den Kreis des Mythos. Die auf die Befreiung und die Bindung des Zentrums ausge-

richteten Energien polarisieren sich. Ihr Kampf führt entweder zur freien Manifestation des Zentrums, und dabei wird aus dem Logos eine zentrale Richtung, ein auf das Zentrum zeigender Strahl geboren. Oder dieser Kampf zerlegt das zusammenhängende Zeichensystem des Mythos, trocknet die Bedeutung des Zentrums aus und endet mit dem nihilistischen Austritt – meistens eher einem ohnmächtigen Herausfallen – aus dem Mythos. Mythos-Einschlüsse, ausgetrocknete Mythos-Bruchstücke sind auch bei diesem Austritt notwendig. (Das geometrische Bild dieses Austritts kann die Gerade sein, die den Kreis in tangentialer Richtung verläßt.)

Die euklidische endlose Gerade kann als ein Kompromiß betrachtet werden, der aus dem Kampf dieser beiden Richtungen, der zentralen Richtung, des zentralen Strahls des Logos und der nihilistischen Bewegung des Austritts aus dem Mythos geboren wurde. Sein geometrisches Bild ist nicht die Tangente, sondern die die Richtung des Strahls nach außen verlängernde Gerade. Sie entsteht, indem man den Ausgangspunkt des Strahls, das Zentrum in die unbestimmte und deshalb unerreichbare Ferne schiebt. Schon wirkt die Chimäre des ständigen Zentrumverlustes, der Zentrumsaufgabe, aber noch ist es von Bedeutung, daß wir das *Zentrum* des Strahls weit von uns hinweggeschoben haben.

Anders gesagt stoßen in der euklidischen Geraden zwei Anschauungsweisen aufeinander: die reine, intensive pythagoreische Anschauung, für die die *zentrale Richtung* die eindimensionale, linienartige Grundtatsache ist, und die extensive, praktisch orientierte mathematische Anschauung, die die neutralere, indifferentere *verunendlichte Gerade* als Grundbegriff betrachtet (die Gerade des Ausfalls aus dem Zentrum kommt zum Beispiel im Trägheitsgesetz der Physik vor). Die euklidische Gerade selbst bringt die Spannung der beiden Anschauungsweisen zum Ausdruck. Sie bewahrt eine minimale Intensität der Richtung und deren Kontinuität. Von hier stammt ihre Kraft, mit der sie zum Teil das Verhältnis zwischen der intensivierenden Funktion der Richtung und der extensivierenden Funktion der Verlängerbarkeit nach außen formt, zum Teil die Gegenüberstellung der beiden Anschauungsweisen in die unendliche Ferne hinausschiebt. Nur so kann sie den angenommenen tragischen Bruch zwischen Wahrheit als reiner Form und Individualität verbergen.

[Wir werden sehen, daß der in den euklidischen Geraden noch unsichtbare Bruch in der hyperbolischen Ebene sichtbar wird.](#)

Zum Schicksal oder eher zur Aufgabe des Logos gehört, daß er derartige Brüche explicit machen und dann auf seinem Weg mit ihnen kämpfen muß. Die Freiheit der Annäherung und Entfernung ist Voraussetzung für den zur Freiheit des Zentrums führenden Weg.

Die Problematik des "unendlich Fernen" begleitet den Logos auf seinem historischen Weg. Er selbst strebt nach der Freiheit des Zentrums, aber auf seinem Weg wirken natürlich auch die gegensätzlichen Kräfte, die der Abstoßung, das Negative des Austritts aus dem Mythos, auf ihn. Und der Logos ist mit seinem Weg identisch.

Die ursprüngliche Form des Mythos schließt den Logos, und so auch die Richtung, ein. Somit führt der Weg des Logos nicht durch leeren Raum. Die Fragen des Logos haben also eine Richtung, einen Ruhepunkt, und zwar im Kern des Mythos. Aber die "Dichte" des Mythos, seine Substantialität und die Indifferenziertheit seiner Zeichen sind auf diesem Weg erloschen. Hierbei nährt der Mythos nur denjenigen, der auf sein Zentrum zugeht. Und wer sich dem Zentrum nähert, der muß auch das nihilistische Leeregefühl, das die aus dem Mythos Austretenden verbreiten, mit der Bedeutung des Zentrums durchglühen. Das Zentrum ist nie ein abstrakter Punkt, es hat eine innere Struktur (wie die Origo) und es ist ein Kräfte ausstrahlender Mittelpunkt; keine abstrakte, sondern eine bedeutungsreiche Freiheit. Und wer sich diesem Mittelpunkt nähert, den beschützt es. Nicht mit Glückseligkeit und auch nicht immer mit Mythos. Dem Zentrum des Mythos nähert sich nur, wer dessen belebende Energien absorbiert und mit dessen vernichtenden Kräften kämpft. Die Bewegung des Logos ist eine im Sinne des Finitismus begrenzte, endliche Bewegung: Sie hat einen Abschluß, einen Ruhepunkt, eine Vollendung. Deshalb ist der Logos immer ein neuer Ausgangspunkt.

Die gerade Linie vermittelt das Prinzip des Finitismus; das Postulat ihrer Grenzenlosigkeit beschränkt die Durchsetzung dieses Prinzips, oder schärfer formuliert: bricht dieses Prinzip.

12.

Wenn wir die Welt der euklidischen Geraden näher in Augenschein nehmen, zeichnet sich vor uns sowohl das Negative des Austritts aus dem Mythos als auch die positive Kraft ab, die in den pythagoreischen Anschauungsformen bewahrt ist.

Euklid stellte sich die Entfernung der Parallelen als konstant vor. Die aus dem Mythos Austretenden kehren sich in sich und können in gleichem Abstand voneinander auf ihrer Bahn bleiben, ohne Annäherung und Entfernung, ohne Begegnung und Abschied. Insofern steht die Gerade für Desorientierung in der Ebene, für zeitlos gemachte, ewige Isolation.

Parallelen haben weder in ihrer Vergangenheit noch in ihrer Zukunft oder Gegenwart einen gemeinsamen Punkt. Das Gemeinsame ist aus der Vergangenheit in die Vorzeit, in den entleerten, entthronten Mythos gesunken und aus der Zukunft in die unerreichbare Ferne entschwunden. Die Parallelen stellen eine Gemeinschaft dar, deren Mitglieder gemeinsam, aber in unüberbrückbarem Abstand zueinander betrachten, was sich in die Vorzeit und in die nebligen Mythen der fernen Zukunft zurückgezogen hat. Sie können das gemeinsam Betrachtete weder als gemeinsame Genesis noch als gemeinsame Erlösung vergegenwärtigen.

Hier ist die Nähe der griechischen Sophisten spürbar. Platon kritisiert an den griechischen Mathematikern und den "sogenannten Pythagoreern", daß sie ihren eigenen Ausgangspunkt nicht erfassen und begründen können.

13.

Minimale Bewegung bei maximaler Konzentration – das ist die Bewegung des *Puruscha*. Die Bewegung als reine, in sich strukturierte Differenz = Qualität = Wirkungskraft. Sie hat eine innere, gegliederte Richtung, das ist ihre Qualität. Ihre Überzeitlichkeit gibt sie nicht aus der Hand, sie kann sie auch in der Zeit vergegenwärtigen. In der neuzeitlichen Physik entspricht ihr das Infinitesimale (die unendlich kleine Veränderung), das Δs .

Maximale Bewegung bei minimaler Konzentration – das ist die Bewegung der *Prakriti*. Eine geradlinige, gleichmäßige Bewegung (in der Physik durch die Bewegung des trägen Körpers versinnbildlicht). Eine Manifestation der räumlichen Desorientiertheit. Die verunendlichte Gerade ist die Spur des Richtungsverlustes. Der *Puruscha* ist alle wesentlichen Wendungen der Bewegung in sich verdichtende und gliedernde Intensität, innerer Raum. Darauf verweisen sogar der Zahlcharakter des Δs (der Differentiale) und die Reihenentwicklungen von Funktionen mit Hilfe von Differentialquotienten.

Bei der Geraden ist Δs konstant. Was sich in gerader Linie bewegt, besiegt keinen inneren Widerstand, deshalb bleibt hier auch das Gesetz, das seine Bewegung verdichtet, ein äußeres Gesetz. Die Gerade ist eine Linie der unbesiegteten Widerstände, sie ist Schicksalslinie und Todeslinie. Dieser Schicksalslinie stellt die freie Lebenslinie die Bewegung des *Puruscha*, das Bewußtsein der Überzeitlichkeit entgegen: eine positiv geladene, in der Zeit wirkende, mit dem Endlichen rechnende Bewegung, die die immer neue Rückkehr zum Zentrum in sich verdichtet.

14.

Die euklidische Ebene ist die Ebene der *Ananke*. Doch in dieser desorientierten Ebene existieren *ähnliche Figuren*. Das Positive des griechischen Geistes: vor tragischem Hintergrund lebendige Formen schaffen. Die Vergleichbarkeit lebendiger Formen vor dem Hintergrund ewiger Nicht-Begegnung. Dynamischer Vergleich abstrakt-archaischer Gebilde: ihre Verkleinerung und Vergrößerung.

Maßeinheit der Messung ist das pythagoreische Grundgebilde, das Einheitsquadrat. Der positive Inhalt des Parallelenaxioms: Die Identität des Einheitsquadrats ist in der gesamten Ebene transparent, *puruscha*artig präsent. Die Möglichkeit seiner Verkleinerung und Vergrößerung ist die Grundlage jeder Messung.

15.

Mögliche Verkleinerung und Vergrößerung der Figuren und unveränderliche *Ananke*, sichtbare pythagoreische Grundformen und unsichtbarer Bruch – die hyperbolische Geometrie kehrt all dies

um. Sie manifestiert die moderne Tragik in der Sprache der Mathematik.

Bolyai, Lobatschewskij und Gauß zerlegen die Gerade in zwei Halbgeraden, und stellen zwischen den parallelen Halbgeraden, die aus dem äußeren Punkt in zwei Richtungen zu derselben Geraden gezogen wurden, einen Bruch, eine Brechung fest (Abb. 2). Die euklidische Gerade hat nur *einen* "idealen", "unendlich fernen" Punkt, die Gerade von Bolyai, Lobatschewskij und Gauß hat zwei. Damit machen sie die in der Geraden eingeschlossenen gegensätzlichen, divergierenden Kräfte sichtbar. Vom Aspekt der Geraden wird jeder Punkt zu einem Brechpunkt. Im Begriff der Parallelität nach Bolyai, Gauß und Lobatschewskij vermischen sich also Anfangs- und Endpunkt nicht mehr wie bei Euklid; hier haben beide eine unterscheidbare Aussage in der Gegenwart (das moderne Zeitbewußtsein). Von der Geraden aus gesehen befindet sich zwischen den beiden keine Kontinuität, sondern eine Brechung.

16.

Das euklidische Axiom der Parallelität – die Einzigkeit der nicht-schneidenden Geraden – garantierte nicht nur die Existenz des Einheitsquadrats. Die Homogenität der geometrischen Anschauung setzte die abgeklärte vertikal-horizontale Gliederung des Quadrats in der ganzen Ebene durch. Die einander nicht treffenden Parallelen wurden von einer deren ganzes Sein umfassenden Vertikalität zusammengefaßt. (Im Gegensatz zu den Parallelen der hyperbolischen Ebene haben die euklidischen Parallelen eine gemeinsame Senkrechte, noch dazu in jedem Punkt: Abb. 3.) Das Licht des Logos-Kreuzes, das die vertikal-horizontale Polarität auf sich selbst bezieht, mehr noch: von sich selbst ableitet, erhellt die ganze euklidische Ebene ungebrochen: Sie hat gemeinschaftliche Transparenz, eine Kraft, die die Gemeinschaft zusammenhält.

Bei den Begründern der hyperbolischen Geometrie erhält das Nicht-Treffen ein größeres Gewicht. Ihre Parallelen haben keinen konstanten Abstand zueinander, sondern sie sind asymptotische Geraden, das heißt ihre Entfernung strebt in Richtung der Parallelität gegen Null. Sie hätten offenbar die Bestimmung, sich zu treffen, aber sie treffen sich nicht. Der Anspruch, das unendlich Ferne näherzubringen, erhält mehr Gewicht, und gleichzeitig damit wächst der Widerstand der Geraden gegen eine vertikal-horizontale Gliederung.

Die Parallelen der hyperbolischen Ebene haben gar keine gemeinsame Senkrechte, und auch die Ultraparallelen (Geraden, die einander nicht schneiden, aber auch nicht parallel verlaufen) haben nur eine. Zudem strebt die Entfernung der beiden Geraden an beiden Seiten dieser gemeinsamen Senkrechten gegen Unendlich (Abb. 4.a und 4.b).

Für die archaische Anschauung ist es unvorstellbar, daß die Transparenz des Logos-Kreuzes derartig an den individuellen Formen bricht.

Bei Bolyai, Gauß und Lobatschewskij hat sich die euklidische Ebene also "umgedreht", sie wird von ihrer Kehrseite sichtbar. Die Welt der tragischen Spannung, der ungelösten Gegensätze, des Auseinanderstrebens tritt in den Vordergrund. (Der Bolyai-Raum ist nah verwandt mit Lajos Vajdas Wirbelräumen.¹⁶) In den Hintergrund gedrängt werden dagegen die Vergleichbarkeit, die Möglichkeit der Verkleinerung und Vergrößerung, die formenreiche Welt der Böhmeschen *Leiblichkeit* und der Rosenzweigschen *Lebendigkeit*: In der hyperbolischen Ebene gibt es keine Ähnlichkeit, keine Figur läßt sich verkleinern oder vergrößern. Dreiecke, begrenzte Figuren werden schwerer geboren, weil die Tragik, die sich nähernden Parallelen und die Wirbel, die das Treffen der zum Treffen Bestimmten verhindern, eine viel größere Tiefe, einen viel stärker betonten Teil der Ebene besetzen. Es ist schwerer zu erreichen, daß zwei Geraden einander schneiden. Die Messung wird wegen der "Gekrümmtheit" schwieriger, ist aber endgültiger. Es gibt eine absolute Längeneinheit, und es gibt ein maximales Dreieck, das ein kongruentes Exemplar jedes Dreiecks in sich enthält.

Ein Vergleich mit Bartók liegt auf der Hand. In seiner Harmoniewelt klingen ebenfalls an sich sterile Konsonanzen und Dissonanzen gegeneinander an. Für beide, sowohl Bartók als auch Bolyai, ist die strenge, scheinbar der Anschaulichkeit beziehungsweise dem musikalisch Schönen gegenüberstehende Darstellung der hinter den klassischen Gebilden verborgenen Brüche charakteristisch, ebenso die Bruchhaftigkeit bei der Lösung der Spannungen. (Bolyai braucht die Konstruktion des "unendlich Fernen" und des "absoluten Raumes", jene Chimäre von Euklid, Newton, Kant, und Bartók braucht – wenn auch nicht immer – das "unendlich Nahe".)

Die Vergleiche mit Bartók und Vajda sind kein Zufall. Bolyai, Vajda und Bartók sind drei herausragende Vertreter dessen, was Botond Isztray¹⁷ "ungarischen Dualismus" nannte. Endre Ady¹⁸ steht über ihnen, er ist der Durchbruch. Sein Pessimismus ist bewußt mit dem Ungartum verknüpft, an wesentlichen Punkten biblisch eingebettet, in Volks- und Messias-Visionen.

Das parallele Geraden-Paar von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij ist ein Bild moderner Tragik: Es macht den bei Euklid noch unsichtbaren Bruch sichtbar. Und das ist die moderne Situation: Der unsichtbare Bruch zwischen Zeichen und Bezeichnetem wird auch im Zeichen sichtbar.

¹⁶ Lajos VAJDA (1908–1941), Maler und Graphiker; führende Gestalt der ungarischen Avantgarde in der zweiten Generation nach Kassák. Beeinflußt von Bartók integrierte er in seiner Kunst Ost und West, Volkskunst und radikalste avantgardistische Sehweise. Seine "konstruktive surrealistische" Sichtweise gipfelt in den Kohlezeichnungen der letzten Periode. "Hier ordnen sich die kurzen, dichten schwarzen Linien auf dem weißen Papier zu immer neuen Kraftnetzwerken, wie Metallspäne an Kraftlinien des Magnetfeldes." (Stefánia MÁNDY: *Vajda Lajos*.) Die strudelnden abstrakt-surrealistischen Gebilde von Tanz, Kampf, Geburt und Tod entwickeln sich zu nicht-euklidischen Raumstrukturen und Formen.

¹⁷ Botond ISZTRAY (geb. 1946), ungarischer Schriftsteller und Essayist.

¹⁸ Endre ADY (1877–1919), größter Dichter des ungarischen Symbolismus, mit ihm fing die geistige Progression in Ungarn an. Die Breite und Tiefe seines Weltbildes ist mit Dostojewskij vergleichbar, nur war er Europäer und linksorientiert. Stärksten Einfluß auf seine Dichtkunst übten die Bibel, Nietzsche und Baudelaire aus.

Wenn die euklidische Parallelität das Urbild jedes Paradigmas ist, dann ist die hyperbolische Parallelität das Urbild der Krise des wissenschaftlichen paradigmatischen Denkens.

In der Blütezeit der paradigmatischen Denkweise akzeptierte die dabei vorherrschende euklidische Anschauung höchstens die Parallelität zwischen *Theorie* und *praktischer Wissenschaft*, also zwischen zwei Forschungsrichtungen (so auch zwischen dem Primat der Richtung und dem Primat der verunendlichten Geraden), von denen die erste die inneren Zusammenhänge und die vollständige Bedeutung der reinen pythagoreischen Anschauungsformen konsequent erforscht, die zweite diese Formen in ihren Paradigmen nur als lockeren Rahmen unbestimmter Bedeutung verwendet. Das Paradigma fixierte die Parallelität, also das Fehlen von Kontinuität, und distanzierte sich von jedem Bestreben nach Analyse und Aufhebung dieses Mangels an Kontinuität. Das überließ diese Denkweise einem "höheren Forum", der pythagoreischen Anschauung. Einem Forum, das sie dann nach Belieben achten, kritisieren oder ablehnen kann, dessen Grundtendenzen und Resultate sie sich zu eigen machen, in Frage stellen oder ignorieren kann. Doch die Existenz und die Funktion dieses Forums brauchte sie unbedingt, um selbst funktionieren zu können.

Inzwischen organisierte diese Denkart die Forschungen und einen Großteil der menschlichen Aktivität, nicht zuletzt der Grundlagenforschung, sehr wirksam und stellte sie in den Dienst der eigenen wissenschaftlich-technischen Ziele. (Descartes übernahm seinen Gedanken *cogito ergo sum* von Augustinus, der damit allerdings die mittelalterliche Theologie philosophisch begründen wollte, während Descartes ihn neu belebte, um die neuzeitliche Naturwissenschaft zu untermauern.) Dies hatte eine recht zwiespältige, aber schwerwiegende Folge: Jede Analyse, die die Erforschung der Funktion und der vollständigen Bedeutung der pythagoreischen Formen nicht den Zielen der Wissenschaft unterordnet, wird negliert. Der Mangel an Kontinuität verschärft sich historisch zum Gegensatz und wissenschaftlich gesehen zum Bruch. Dies untergräbt die Stabilität der euklidischen Parallelität und jedes statischen Paradigmas. Die hyperbolische Geometrie läßt auch die noch übriggebliebene Fiktion des euklidischen Gleichgewichts einstürzen. Der zugespitzte Widerspruch erscheint in der Geometrie und demzufolge in der Wissenschaft generell als sichtbarer Bruch. Um das zerstörte euklidische Gleichgewicht auszugleichen, wurde der Kampf zwischen der vollständigen Bedeutung der pythagoreischen Formen und deren wissenschaftlicher Einengung auch in der Mathematik (und Axiomatik) im engeren Sinn, obzwar in beschränktem Rahmen, thematisiert, wenn auch die meisten Forscher sich dessen nicht bewußt sind.

Das Verhältnis von Metaaxiomatik und Axiomatik ist nicht symmetrisch. Die metaaxiomatische Forschung läßt die mächtigen, im Interesse begrenzter Ziele bewegten Kräfte nicht unberücksichtigt, sie analysiert und wertet sie. Die Metaaxiomatik betrachtet die hier

beschriebene einseitige neuzeitliche Entwicklung nicht als ungeschehen oder, unter höherem Aspekt, unwesentlich. Aber sie fühlt sich auch nicht ohnmächtig bei deren wertender Analyse und der Trennung der dies bestimmenden positiven und negativen Kräfte.

Der schon im Zeichen sichtbar werdende Bruch, die Krise des paradigmatischen Denkens, die moderne Tragik beziehungsweise die Gerade der hyperbolischen Ebene, die paradoxen Linearitätsformen, die Kurven mit Nullkrümmung – sie sind tatsächlich paradigmatische Zeichen der modernen Situation. Die mit ihnen auftauchenden mathematischen Fragen mündeten schließlich in die Krise der Mengenlehre. Die Rückeroberung des *produktiven* Unterschiedes zwischen der praktischen Wissenschaft und der Theorie (Geometrie + Arithmetik und Logik) für die Mathematik sowie ihre Fundierung in einer, für die metaphorische Bedeutung der Zahl sensiblen Anschauung wurden von Kurt Gödel in Angriff genommen. (Eine kritische Wertung seines Schaffens enthält unser folgender Aufsatz.)

19.

Jetzt kehren wir zu dem Punkt zurück, an dem es Bolyai und Lobatschewskij gelang, die bei der Analyse der Geraden erschlossenen, ins Tragische zugespitzten Brüche zu einem Weltbild zu formen. Wir haben gesagt, die Revolution von Bolyai und Lobatschewskij sei eine Revolution der Individualität. Kern jedes Individuums ist das gleiche unteilbar eine, teilende und messende Subjekt. Zugleich hat jedes Individuum die Welt der Geteiltheit in sich. Diesen Widerspruchsherd der Individualität rückt die hyperbolische Geometrie in den Mittelpunkt, und mit seiner Analyse sprengt sie die Stabilität des wissenschaftlichen Paradigmas, um eine Form herauszuschmelzen, die den Kampf der widersprüchlichen Kräfte dynamischer zum Ausdruck bringt. Wir müssen zunächst klären, auf welchem Niveau diese Form die Widersprüche der Individualität artikuliert und bis zu welchem Grad sie sie aufhebt. Auf das Sichtbarwerden der Bruchpunkte der Individualität haben wir bereits bei der Analyse des Bruchs der parallelen Halbgeraden hingewiesen. Betrachten wir diesen Bruch aber nicht vom Aspekt der Geraden, sondern des *Punktes* aus, so vergeht das unangenehme Gefühl der Diskontinuität sogleich, und an seine Stelle tritt die kraftvolle Raumartigkeit des Punktes. Die ganze Gerade läßt sich in einem *von einem Punkt* ausgehenden Winkelraum einschließen (Abb. 5). Die beiden Enden der Geraden divergieren nicht so sehr wie bei Euklid. All das, was die Gerade über den Anfangs- und Endpunkt zu sagen haben kann, läßt sich in dem Raum *einer* Subjektivität einschließen und durch die Intensität seiner Gegenwärtigkeit zum Glühen bringen. Im Raum des Punktes kann sich alles vereinen, was früher an den "beiden Enden" der Geraden im Nebel des entthronten Mythos verschwunden war. Das unendlich Ferne hat bei Bolyai, Gauß und Lobatschewskij spürbar mehr Eros als zuvor bei Euklid.

Zum einen erobert der Punkt als Ausgangspunkt große Gebiete seiner bei Euklid verlorenen

Intensität und raumschaffenden Fähigkeit zurück. Zum anderen wächst der Bedeutungsinhalt des unendlich Fernen spürbar.

1) Die unendlich fernen Punkte der auf dem euklidischen System aufgebauten projektiven Geometrie sind durch die *unendlich ferne* Gerade verbunden. In der hyperbolischen Ebene sind – in Hilberts denkwürdiger Formulierung – zwei beliebige Enden, das heißt unendlich ferne Punkte durch eine *echte* Gerade verbunden.¹⁹ Die unendliche Ferne erscheint zwar nicht vor unserem Auge, wohl aber die Beziehung zwischen ihren beiden Momenten.

2) Die Parallelen verhalten sich in der hyperbolischen Ebene wie gegenseitige Asymptoten, sie kommen einander beliebig nahe. Sie bieten ein spannungsgeladenes, plastisches Bild, das fast expressiv auf das "Ende", das über jedes Ende Hinausgehende, das Unendliche *weist*. Aber dieses hat etwas Feminines: auf der einen Seite plastisches, emotionsgeladenes Zeigen, auf der anderen unendliche Ferne. Mit energischer, kraftvoller Gebärde protestiert dieses Bild dagegen, daß die Intensität des Zentrums verblaßt und in der unendlichen Ferne entschwindet, aber auch hier wird dem Abschluß der Bewegung durch den Gedanken der Unbegrenztheit, der beliebigen Verlängerbarkeit Einhalt geboten. Infolge dieser unvollendeten Bewegung krümmt sich die Ebene. Der Logos hat Wendepunkt-Charakter, aber bei der Durchsetzung dieser Wende wird er mit dem Problem der unendlichen Ferne konfrontiert. Dem ist auch hier so, und die unendliche Ferne ist so stark, daß die vollständige Wende verhindert wird. Die Aufhebung der im Zeichen förmlich sichtbaren emotionalen Spannungen ist ins Unendliche verschoben worden. Mit anderen Worten: Dieses Bild will die Kluft zwischen dem Endlichen und dem als unendliche Ferne gedeuteten Unendlichen einseitig mit emotionaler Energie auffüllen.

3) Gemäß dem intensivierenden Bestreben und Willen zur Form gibt es im Grunde nur ein Parallelen-Paar, da zwei parallele Streifen stets kongruent (das heißt durch eine Bewegung zur Deckung zu bringen) sind. Bei Euklid trifft das nicht zu, dort hängt die Gestalt des Streifens von der Entfernung ab. Doch sowohl in der hyperbolischen als auch in der euklidischen Ebene decken sich die gleichen Winkelräume. Man kann also sagen, daß sich das parallele Geraden-Paar der hyperbolischen Ebene in dieser Hinsicht wie ein *Winkel* verhält (siehe auch das sogenannte asymptotische Dreieck auf Abb. 6).

Im Vergleich zu Euklid ist die unendliche Ferne gewissermaßen in Bewegung geraten; ihr Gewicht hat zugenommen, und man spürt einen Impuls zum Näherbringen. Dementsprechend läßt sich auch die Linearität mit Spannung auf und differenziert sich, sie kommt in Bewegung von innen.

Die Spannungen waren bereits zu erkennen: Gegen die rechtwinklige Gliederung der Ebene regt sich in der Geraden Widerstand. Und was die Differenzierung angeht: Die Gerade ist in der euklidischen Ebene gleichzeitig Kreis mit unendlichem Strahl (Gauß, Lobatschewskij), Abstandlinie²⁰ und kürzester Weg zwischen zwei Punkten. Der Unterschied dieser drei Funktionen

¹⁹ Wollen wir allen parallelen Geraden denselben unendlich fernen Punkt zuordnen, so ordnen wir in der euklidischen Geometrie jeder Geraden genau einen "idealen, unendlich fernen Punkt" zu, da zwei parallele Geraden in beide Richtungen parallel sind (siehe Punkt 5.). In der hyperbolischen Geometrie geht das nicht, weil dort zwei Geraden, die in einer Richtung parallel sind, in der anderen Richtung nicht parallel verlaufen. Also müssen wir einer Geraden zwei unendlich ferne Punkte zuordnen, die Hilbert "Enden" nennt. Er beweist, daß zwei "Enden" immer durch eine "eigentliche" Gerade verbunden sind. Mit anderen Worten: zu zwei beliebigen Richtungen gibt es eine Gerade, die mit beiden parallel ist. Oder: Wenn e und f zwei beliebige Halbgeraden sind (die z.B. von einem Punkt ausgehen und einen sehr kleinen Winkel einschließen), dann gibt es eine Gerade, die mit beiden parallel verläuft (siehe Abb. 5). Jede Gerade kann in einen noch so kleinen Winkel eingeschlossen werden.

²⁰ Wenn e eine Gerade und P ein Punkt der Ebene ist, dessen Abstand von e gleich d ist, dann bilden alle Punkte, die auf derselben Halbebene und im gleichen Abstand zu e liegen wie P , eine *Abstandlinie*. In der euklidischen Ebene ist sie immer eine Gerade, die parallel zu e verläuft. In der hyperbolischen Ebene gilt das nicht, weil dort der Abstand der parallelen Geraden gegen Null strebt. Wie Abb.4 zeigt, kann die Abstandlinie auch keine andere nicht-schneidende Gerade sein. Die Gerade f hat einen Punkt, dessen Abstand von e gleich d ist, aber f entfernt sich von e auf beiden Seiten dieses Punktes. Darum muß die Abstandlinie (die Gesamtheit der Punkte, die im Abstand d zu e

wird in der hyperbolischen Ebene sichtbar. Die Gerade bleibt der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten, aber die Abstandslinien und der Kreis mit unendlichem Strahl bilden bereits einen neuartigen Linearitätstyp: Obwohl ihre Krümmung überall Null ist, sind sie (streng konvexe) Kurven.

Die neuen Formen der Linearität, die zum Teil paradox sind und auf jeden Fall dramatischere Spannungen enthalten, existieren und erscheinen lediglich in der dynamischeren Anschauung von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij. Wir sehen und verstehen sie nur, wenn wir diese Anschauungsweise verinnerlichen und uns jene Bestrebung von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij zu eigen machen, die die paradoxen Formen der Linearität hervorbrachten, nämlich ihre Bestrebung, *die Bedeutung des unendlich fernen Punktes näher zu bringen*.

Geniale Mathematiker waren schon immer fähig, die Mathematik in neue Richtungen zu lenken, weil sie daran glaubten, daß die Wahrheit tieferliegende, noch nicht mathematisierte Kreise hat, die sie dann in mathematische Form faßten. Solche Formen produktiv zu verstehen, bedeutet nicht nur ein formales Verständnis, sondern die wertende Aneignung des Glaubens und der Weltauffassung, die diese Formen zustande bringen und beleben (wie man es an Hilberts und Gödels Bolyai-Aneignung sieht).

20.

Zusammenfassend: Die Subjektivität, die sich der Gegensätze, genauer: des Tragischen, bewußt ist, bildet jene Kraft, mit der Bolyai und Lobatschewskij das, was sie zu sagen haben, zum Weltbild formulieren und die euklidische Welt der Zentrumaufgabe analysieren. Die gemeinschaftsbildenden Kräfte dieser Welt werden teilweise in den Hintergrund gedrängt; zum Vorschein kommen die Brüche der Gemeinschaft.

Wenn wir die Wirbelräume von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij ihrer Größe angemessen werten wollen, müssen wir die Stellung der gegensatz- und tragikbewußten Subjektivität im Logos und ihr Verhältnis zum Logos erfassen.

Wir haben weiter oben gesagt, daß jeder Austritt des Logos aus dem Kreise des Mythos im Sinne des Finitismus eine endliche Bewegung ist, die einen Abschluß, einen Ruhepunkt hat. Der Logos erreicht seinen Ruhepunkt, seine Ruhe nur, indem er die Ruhe des Mythos in *Unruhen* mit umgekehrtem Vorzeichen zerlegt. An diesem Punkt werden die Individualität und ihr Widerspruchbewußtsein geboren (Sokrates). Aus den widersprüchlichen Unruhen schafft die Zentrumrichtung des Logos Gleichgewicht, Harmonie, lebendige Form und Ruhe.

Euklids Parallelen lassen sich noch durch ihre selbstverständliche Eindeutigkeit von den schneidenden Geraden unterscheiden. Auch bei Bolyai, Gauß und Lobatschewskij lassen sich die

liegen) "sich in der Richtung e neigen". Sie ist eine Kurve, die sich mit ständiger Krümmung "nach e neigt", doch ihr Abstand von e bleibt der gleiche. Es kann bewiesen werden, daß ihre Krümmung überall Null ist. Der Kreis mit unendlichem Radius kann auf die gleiche Weise definiert werden wie die Kugel mit unendlichem Radius.

P parallelen durch ihre eindeutige Bestimmtheit von der schneidenden und den übrigen nicht-schneidenden (den sogenannten ultraparallelen) Geraden unterscheiden, aber diese Eindeutigkeit ist bereits das Ergebnis eines sichtbaren permanenten Kampfes. Hier zeichnet sich eine Parallele als scharfe trennende *Grenze* zwischen gegensätzlichen Bereichen ab (nämlich von sich schneidenden, also sich treffenden, und von sich nicht schneidenden, also sich ständig voneinander entfernenden Geraden, s. Abb. 7). Hier gibt es nur noch Entfernung und Annäherung, aber keine Geraden mit konstantem Abstand.

Einen *starken* Logos – mit einem Ausdruck aus Béla Tábor's Pneumatologie – und eine damit adäquate Aussage kann nur die gegensatzbewußte Individualität haben. Wer die Welt der Ruhe nicht in Leidenschaften mit entgegengesetzter Richtung zerlegt hat, wer sich nicht mit der Welt der Gegensätze und darin auch Kierkegaards Entweder-Oder auseinandergesetzt hat, in dem kann der Logos nicht aufleben, keine neue Gestalt annehmen.

Der Neoklassizismus von Thomas Mann, Hindemith, Honegger, Orff und Babits²¹ hat eine verzerrte, falsche und leere Harmonie. Die zugespitzte Disharmonie, der Wirbelraum von Kafka, Beckett, Schönberg, Vajda, Bartók, Michaux und van Gogh enthält hingegen eine prägnante Aussage für uns.

So hat der Wirbelraum von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij, auch dessen Diskontinuität eine solche Aussage für uns, weil sie hinter die falsche Kontinuität des Vergessens, der endlosen Linearität sehen. Sie bemerken die verborgenen Gegensätze, Brüche, die divergenten Richtungen, und konfrontieren die ausgeprägte, auf das Zentrum zustrebende Richtung der Individualität "auf eigenem Gebiet" der Rationalität mit ihnen.

21.

Der Logos fragt uns an jedem Punkt unseres Lebens: Womit identifizieren wir uns in dieser Welt der Gegensätze? Was stärkt und vertieft unser Gerichtetsein auf das Zentrum, was verbreitert seinen Wirkungsbereich, was bietet einen weiteren Gesichtskreis?

Bolyai nahm deutlich wahr, daß das euklidische Parallelenaxiom hypothetisch ist und daß diese Hypothese nicht in eine Gesamthypothese eingebettet ist. Ein solches deutlicher und reicher artikuliertes geometrisches System mit stärkerem Wahrheitsgehalt wollte er konstruieren (insofern mag er mehr als Lobatschewskij gewollt haben). Sein Ziel war, im Gegensatz zur "reinen" rationalen euklidischen (Geraden und) Geometrie, eine umfassendere Geometrie, in der sich hinter dem – den rationalen Zahlen entsprechenden – euklidischen System (der Parasphäre, bei Bolyai S-Fläche genannt) das – den irrationalen Zahlen entsprechende – nicht-euklidische System abzeichnet (und wo die Kurven und Flächen mit Null-Krümmung zum Vorschein kommen). Positiv an Bolyais "absolutem Raum" ist, daß die Formen der Wahrheitsforschung in ihm reichhaltiger und akzentuierter sind.

Das ist es, womit wir uns identifizieren können und wollen. Wir identifizieren uns mit jeder

²¹ Mihály BABITS (1883–1941), ungarischer Dichter und Schriftsteller. 1929–41 Chefredakteur der renommierten literarischen Zeitschrift *Nyugat* (*West*).

Daseinsform in dem Maße, wie sie mit ihrer gesamten Energie den überzeitlichen Anfangs- und Endpunkt unseres Seins und die Widersprüche, die die stete Anwesenheit des überzeitlichen Zentrums in der Zeit verursacht, erfaßt. Und wo sich Gelegenheit zu dieser Identifikation bietet, *dort* lieben wir. Unwiderruflich.

Auch wenn wir sehen, daß zum Beispiel Bolyai (und unter den größten Ungarn neben ihm beispielweise Csontváry²²) sich nicht immer von den Widersprüchen der eigenen Wirbelräume befreien kann (siehe das über die asymptotischen Geraden Gesagte). Wir nehmen unsere Achtung vor ihren Resultaten nicht zurück, sagen aber die nur halb oder gar nicht ausgesprochenen Widersprüche völlig aus, um mit ihnen kämpfen zu können.

Auf den Urwiderspruch des konkreten Daseins des Logos – daß das überzeitliche Zentrum immer wieder in der Zeit gegenwärtig ist – führen wir jeden Widerspruch zurück, von hier deuten wir ihn und wollen wir ihn aufheben. Und wenn wir den Wirbelraum von Bolyai, Gauß und Lobatschewskij und dessen Widersprüche von hier deuten, lassen ihre Werke klar erkennen: – den Kampf um die intensive geometrische Anschauung, damit dem "Idealen", dem "Absoluten", dem unendlich Fernen hier und jetzt Bedeutung zukomme, es aus der deistischen ideologischen Rahmenfunktion herausgehoben werde und in der manifesten Welt der Gegensätze wirken könne; und – das Bestreben, auch dem zwischen Geburt und Tod gesperrten Individuum für das überzeitliche Zentrum jenseits von Geburt und Tod auf sein ganzes Sein wirkende Bedeutung zukommen zu lassen; aber auch – unsere Aufgabe: diesen Kampf, dieses Bestreben fortzusetzen. Was sie in der Sprache des Zentrumvergessens, in der an das Paradigma der endlos-unendlichen Geraden gebundenen (extensiven) Sprache formuliert haben, deuten wir im Raum der auf das Zentrum gerichteten immer tieferen Erinnerung und einer dynamisierten pythagoreischen Anschauung.

Nach Kierkegaard, Dostojewskij und Ady vergessen wir nicht, daß wir die mit noch so viel Pathos und Erhabenheit ausgedrückten Gegensätze der Entzweiheit, Spaltung, Trennung, Bruch, Krankheit nur deshalb ins Bewußtsein rücken, weil wir das "Ideale", das aus der Hand des Bürgers in die schlechte Unendlichkeit der endlosen Leere gefallen oder in den längst bedeutungslosen Hüllen des Mythos verkrustet ist, für uns befreien wollen: Wir wollen das Zentrum unseres Daseins wieder herstellen.

²² Tivadar CSONTVÁRY KOSZTKA (1853–1919), visionärer Maler gigantischer Gemälde von eigenartigem Kolorit und starker Symbolik

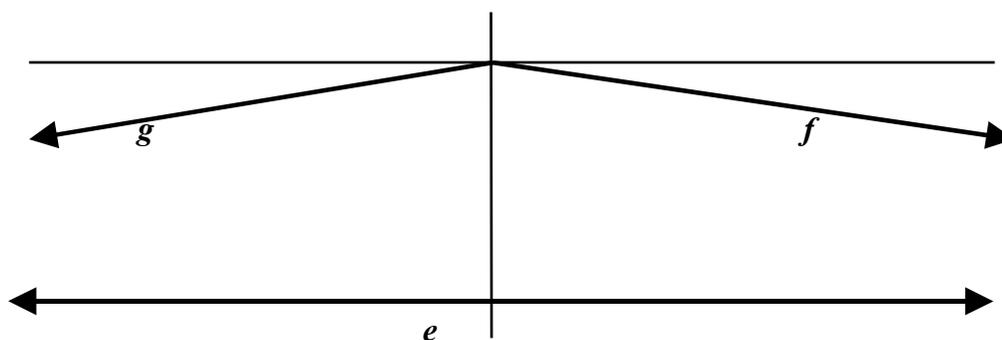


Abbildung 2, gültig in der hyperbolischen Geometrie:
 e ist parallel zu f (nach rechts) bzw. zu g (nach links).
 Brechung: Die Größe des Winkels zwischen ihnen ist kleiner als 180°

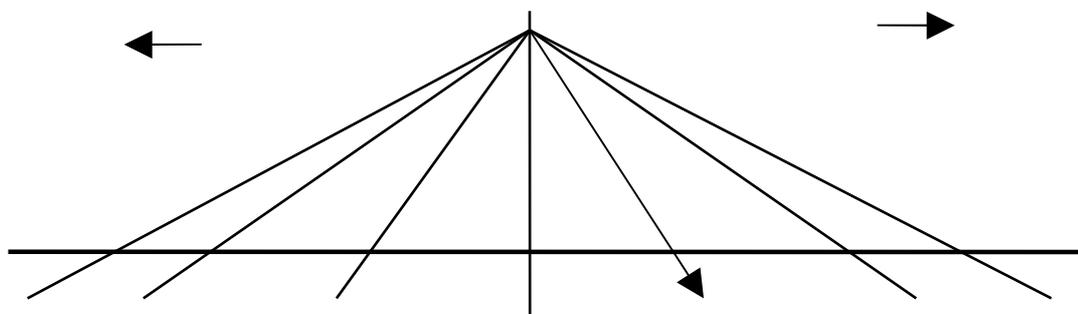


Abbildung 1, in beiden Geometrien gültige, „absolute“ Annahme:
 an den zwei „Enden“ der Gerade befindet sich etwas anderes

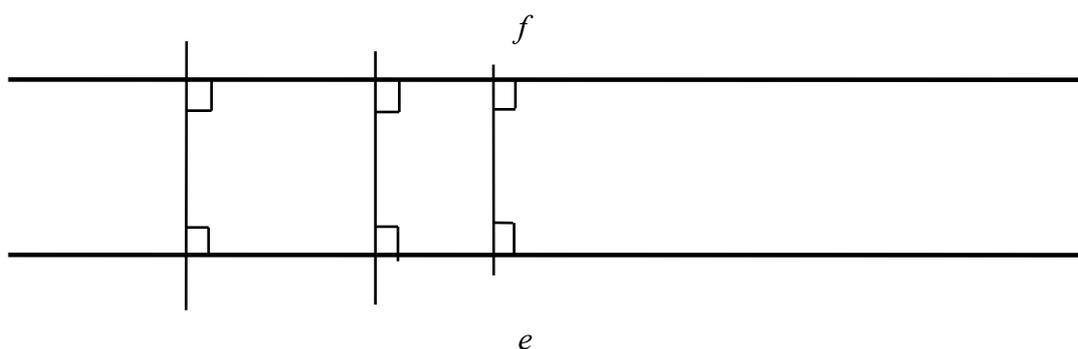


Abbildung 3, gültig in der euklidischen Geometrie:
 e und f sind Parallelen, ihr Abstand ist konstant.

Durch alle Punkte der Ebene geht eine zu e und f senkrechte Gerade.
 Es gibt ein Quadrat; die Transparenz der Rechtwinkel-Struktur.
 Tragik: Der gemeinsame (Begegnungs-)Punkt ist ins Unendliche verschoben.

Die weitere Abbildungen folgen gleich