

## Adalékok a halmazelmélet kérdéseihez

Szabó Lajos

Halmaz alatt Bolzano egymástól elkülöníthető *tárgyak*, illetve *elemek összefogását* érti. Első kérdésünk: milyen létező a „halmaz”? Mert, hogy a halmaz *valamilyen-fajta létező*, az előttünk nem lehet kétséges. Sőt! Minden speciális vizsgálat előtt abszolút bizonyos, hogy a halmaz bármilyen fajtájú létezőként is jelentkezik majd a részletes vizsgálat nyomán, birtokában van a maga legsajátosabb, mindenki másétól lényegesen különböző *ellentmondás-körforgásának*, *-hierarchiájának*, illetve *-örvényének*.

Ami speciális vizsgálatot igényel, az csupán annyi, nem tartalmaz-e a „halmaz” olyan ellentmondást, mely első pillanatban megfogható, kiküszöbölhető és kiküszöböltetésével mintegy teret nyit a *lényegesebb ellentmondások felszínre törésének*! Ezeknek a mindig újra és újra felszínre törő ellentmondásoknak kikutatása *az ellentmondás megmaradásának elve* mentén kialakuló *leíró természettudománynak*, *az ellentmondások természetrajzának a feladata*.

A „halmaz” tehát, Bolzano szerint, egymástól elkülöníthető elemek összefogása. Nyilvánvaló, hogy Bolzano és vele mind a halmazelméleti s matematikai-logikai kutatók „elemek” alatt egyáltalán nemcsak egymástól elkülöníthető fizikai elemeket, illetve tárgyakat értenek, hanem *tetszés szerinti képzeleti és gondolati tárgyakat, elemeket és mozzanatokot is*. Így a halmazelmélet szerint egy speciális halmaz lehet az összes ellentmondó tárgyak halmaza is!

Kiegészítésül meg kell jegyeznünk, hogy nemcsak az összefogott halmaz elemei lehetnek *tetszés szerinti képzeleti és gondolati, érzelmi vagy akarati mozzanatok*, hanem az „összefogás” maga, mely ezeket a mozzanatokot halmazzá „varázsolja” és minősíti, éppoly kevésbé kell, hogy fizikai „összefogottság” legyen, mint ahogy az elemeknek nem kellett fizikai elemeknek lenniök!

A halmaz definíciójában szerepel az elkülönítés fogalma, amennyiben a halmaz elkülöníthető elemek összefogása és együvé tartozása.

De a halmaz definíciójában még egyszer szerepel az elkülönítés fogalma. Nem így nyíltan, hanem burkoltan, rendkívül átlátszó ruhában. Az elkülönítés mint összefogás és hozzátartozás van álcázva. Sem az összefogás, sem a hozzátartozás mint kifejezések nem mondanak mást, mint hogy az önmagukban elkülönült elemei a halmaznak nemcsak önmagukban, illetve egymástól különülnek el, hanem együttesen a *mindenség összes rajtuk kívül fekvő elemeitől is!*

Ha viszont ezzel szemben felmerül a kérdés, hogy az elemek elkülönítése más elemektől feltétlenül *halmazzá-összefoglalásukat kell hogy jelentse-e?*, úgy erre a kérdésre *feltétlenül igennel kell válaszolnunk*. Mert ha valaki explicite sem összefogásról, sem pedig hozzátartozásról nem beszél, hanem ezeknek a kifejezéseknek gondos kikerülésével csak annyit mond:

„a mindenségben szétszórva és a mindenség többi elemeitől elkülönítve”

– nos, ez csendben és rendben elgondolható, de ez nem ellenvetés, mert ez már egy halmaznak a leírása: mert bármennyire szét vannak szórva a mindenségben és önmagukban, s a mindenség többi elemeitől bármennyire is el vannak különítve, éppen ez a kettős elkülönülés *teszi* halmazzá őket a halmazelmélet elem- és összefogás-felfogása szerint. Mert éppúgy, mint ahogy a halmaz eleme *tetszés szerinti gondolati tárgy* lehet, a halmazelméleti „összefoglalás” *tetszés szerinti gondolati összefoglalást* kíván csak meg. És így az egymástól és a mindenség más elemeitől való elkülönítettségük „egy halmazzá” avatja ezeket az elemeket, és így végleg igazolva van az az állításunk, hogy az „összefoglalás” és „hozzátartozás” kifejezések teljesértékűen pótolhatók a „mindenség más elemeitől elkülönítve” kifejezéssel.

(Természetesen, ha a mindenségben ezen a halmazon kívül volnának elemek önmagukban és a mindenség más elemeitől szintén elkülönítve, akkor nem tudnók ezektől a „szintén elkülönített” elemektől a mi halmazunk elemeit megkülönböztetni. Viszont ebben az esetben csak az derülne ki, hogy a mi halmazunk elemei mégsincsnek a mindenség más elemétől elkülönítve, és ha nincsenek elkülönítve, akkor minden logika, sőt minden halmazelmélet is azt követeli, hogy ezeket az el nem különített elemeket *ne nevezzük halmaznak*, és akkor nem lesznek olyan álproblémáink, mint hogy halmazunk elemeit más elemektől nem tudjuk megkülönböztetni.)

A halmazelméleti tájszólástól saját nyelvünkhöz közeledve azt mondhatnánk, hogy a halmaz nem más, mint *kettős elkülönítése, kettős negációja* elemeknek: először egymástól, másodszor minden rajta kívül fekvőtől. Vagy: tetszés szerinti gondolati szabadsággal, létminimum-szerű *vékony-ság-gal* való össze- és egybefoglalása önmagukban elkülönített elemeknek.

(Így kiderül az is, hogy a halmaz maga a *könnyűség*. Valami annál könnyebb, valaminek annál több része van a könnyűségben, minél nagyobb szerepe van az *ő* egészében az *ő* felületének. Nos, a halmaz az az emberi alkotás, mely fogalmánál és konstrukciójánál fogva a felületek és határok abszolút túlsúlyát jelenti a belterülettel szemben, mert a halmaz az a valóság, ahol még a belterület is színtiszta határolásokból áll.)

Mit tudunk tehát egy tetszés szerinti halmazról, illetve elemeiről?

Tudjuk, hogy létminimum-szerű elemek létminimum-szerű összefoglalása. A „létminimum-szerű elemek” kifejezés itt nem akarja azt mondani, hogy az elemeknek ilyen pontszerű valóságoknak kell lenniük, hanem csak azt, hogy a tetszés szerinti bonyolódottságú és gazdagságú elemek csak létminimum- és pont-szerű mivoltukban jönnek számításba a halmaz alkotásánál, és egyből tetszőleges gazdagságuk a halmaz szempontjából *tisztára közömbös*.

A rendezett, illetve jólrendezett halmazoknál a létminimum-szerű elemek összefogása már nem létminimum-szerű, hanem annál gazdagabb. A lét- és struktúra-minimumból a strukturáltság egy konkrét fokára emelkedik. Ezt tudjuk a teljesen tetszés szerinti és a valamiképpen már rendezett halmazokról.

Hol merülnek fel a halmazelmélet megoldhatatlan problémái?

*A végtelen halmazok csoportjánál.*<sup>1</sup>

A végtelen halmaz: valódi részével ekvivalens. A végtelen halmaz olyan halmaz, melynek van olyan része, mely az egészszel egyenértékű. A végtelen halmaz esetében tehát a legezaktabbnak ismert tudomány alapjainál (annak a tudománynak az *alapjainál*, amely tudománynak kincseiből a *többi egzakt tudományok a maguk egzaktóságát merítik!*), minden logika és minden józan ész megcsúfolásaként azt voltak kénytelenek tapasztalni, hogy a *rész egyenértékűnek mutatkozik az egészszel!*

Ezt a felmerült ellentmondást feloldani akaró kísérletek között volt egy, mely úgy látta, hogy a kérdés megoldásához elengedhetetlenül szükséges a *végtelen* fogalmának behatóbb vizsgálata. Ez a kísérlet arra figyelmeztet bennünket, hogy a „végtelen” kifejezése tulajdonképpen *negációt* fejez ki! Mi ehhez a kísérlethez csatlakozva azt kérdezzük: *minek a negációja a „végtelen” kifejezése?* – És mivel a szó itt leplezetlenül mutatja saját tartalmát, rögtön adódik a felelet, mihelyt mertük, illetve fel tudtuk tenni a kérdést: a „végtelen” a „véges” negációja!

A „véges” negációja! – A szó továbbra is segítségünkre van, elmondja, hogy a „véges” fogalma maga is – *tiszta negáció!*

Tehát a „végtelen” kifejezésének axiomatikus latolgatása ezt mutatta: *kettős negáció!*

---

<sup>1</sup> Szabó Lajos természetesen nem absztrakt algebrai értelemben vett csoportra gondol.

Kettős negáció pedig nemcsak a nyelvben, az arisztotelészi és hegeli logikában, de a matematikában is pozíciót, igenlést jelent. A kettős negáció igenlést jelent, ha egyáltalán jelent valamit, ha a két negáció nem olyan jellegű, hogy egymást tökéletesen feloldja, mert ebben az esetben a szerepe csak annyi, mint a francia szóvégi néma e-nak, az eggyel való beszorzásnak, vagy a nulla hozzáadásának. Ennek a tudomásulvételével a végtelen halmaz problémáját így fogalmazhatjuk meg: a *pozitív halmaz valódi részével egyenértékű!* Így az ellentmondás tisztán, homály nélkül tűnik elő! Ha viszont úgy fogalmazunk, hogy a pozitív halmaznak van pozitív része, akkor meg nyom nélkül eltűnik az ellentmondás.

Ez a nagyobbik baj. Az ellentmondás látható volt és most láthatatlanná vált. Mert van egy homályos önellentmondással szemben egy világos önellentmondást kifejező formulázásunk is, ott viszont a speciális halmazelméleti-matematikai mozzanatát a kérdésnek nyelte el a szélesebben általános logikai fogalmazásunk. Mégis jó úton járunk. Az ellentmondás eltűnt a kutatás felszínéről és visszasüllyedt az alapok felé, s ha ott meg tudjuk ragadni, akkor fel is tudjuk oldani.

Ezért vissza kell térnünk az elemi, tetszés szerinti halmaz fogalmához és új irányból kell azt elemeznünk.

Mi jellemző a halmazra? Az össze- és egybefogáson belüli *teljes rendezetlenség*. (Vannak rendezett halmazok is, de nem azok a halmazelméletben az alapvetők, és minket természetesen csak az alapvetőek érdekelhetnek.) Az elemi halmaz elemei teljesen különállóak és teljesen rendezetlenek. Kérdésünk: lehetséges-e illetve miképp lehetséges ez? Lehetséges-e a különálló teljes rendezetlensége a halmaz keretén belül?

Lehetséges-e a halmaz – az ellentmondó valóságok világán kívül –, ami megalkotásánál, definíciójánál fogva nem más, nem lehet több, mint egy *miniatűr és elszigetelt káosz*?

Miképp volna lehetséges a lokalizált káosz?

A halmaz *a rendezett világ tengerében* az abszolút rendezetlenség szigete volna.

Miképp szigetelhető el a halmaz miniatűr káosza a rendezett világtól, amiben a halmaz létezik; hiszen a halmaz fogalma egyértelműen feltételezi a kívülfekvő világ rendezettségét, mert e nélkül a rendezettség nélkül a halmaz nem volna szigetelhető, külön- és egybefogható! Ha a rendezetlen halmaz egy rendezetlen világban volna, akkor a halmaz gondolati határait is lehetetlen meghúznunk. Káosz és mozzanata gondolatilag is szétválaszthatatlanok egymástól.

Kérdésünk más hangsúllyal: miképp lehetséges a rend abszolút hiánya, az abszolút külön- és önmagában-lét a világ bármelyik pontján, az abszolút összefüggéstelenség?

Vagy: a halmaz valamilyen létezőknek olyan keretszerű összefogása, ahol az elemek, létezők rendjéről és összefüggéséről még minimális formában sem beszélhetünk. Rend- és összefüggésnélküli elemek és létezők keretszerű összefogása.

Megint tovább kell mennünk egy lépéssel: mit nevezünk létezőknek? Mert az „elem” kifejezés a halmazelméletben is a csupasz létnek, a *létminimumnak*, de mindenképpel a *lét*-minimumnak is a változata.

Mit nevezünk létezőnek ebben az értelemben?

Nos, bármely létminimum-szerű létezéshez hozzátartozik a rendezettségnek és összefüggésnek egy minimuma! És így arra a kérdésre, hogy mi a halmaz, az eddigiek alapján így felelhetünk: rend és összefüggés minimumával rendelkező, illetve rend és összefüggés minimumával nem rendelkező valamik keretszerű összefoglalása.

Bizalmunk nem csalt meg bennünket: a „végtelen” halmaz vizsgálatánál eltűnt ellentmondást kiindulópontjában sikerült felfedeznünk. Egy késői, felületi ellentmondást egy korábbi, alapvető ellentmondásra vezettünk vissza.

Mindezzel természetesen semmit sem kívántunk mondani a halmazelméleti konstrukciók és kutatások ellen.

A világ szakrális rendje összeomolna, ha az életünk összes többi területén tért nyerő nihilizmus akárcsak a matematikai alapproblémák körében nem érvényesülhetne.

(1937–38)